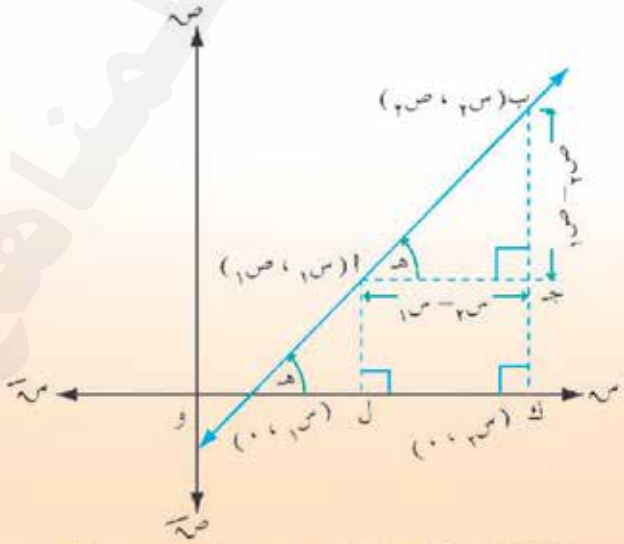
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي
قطاع المناهج وتخطيط التعليم
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الثاني)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم والبحث العلمي

١٤٤٧هـ - ٢٠٢٦م



الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي
قطاع المناهج وتخطيط التعليم
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

(الجزء الثاني)

حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم والبحث العلمي

١٤٤٧هـ - ٢٠٢٦م

http://E-learning-moe.edu.ye



المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

بسم الله الرحمن الرحيم

تصدير

الحمد لله رب العالمين وصلى الله وسلم على سيدنا محمد وآله الطاهرين ورضي الله عن صحابته المنتجبين وعنا معهم برحمتك يا أرحم الراحمين

وبعد :

تحرص وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي على تجويد وتطوير العملية التعليمية من خلال إرساء قواعد منظومة تعليمية متكاملة تلبي احتياجات البيئة اليمنية وتتناسب مع هويتها الإيمانية.

وبعد مراجعة النظام التعليمي وقياس مستوى أدائه، وتحديد أهم التحديات التي تواجهه، قامت وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي بإعادة أولوياتها، وتنظيم جهودها لإحداث التطوير بما يتماشى مع توجهات الدولة ورؤيتها المستقبلية؛ حيث أصبحت تعنى بالمتعلم باعتباره محور العملية التعليمية التعلمية.

إن النقلة النوعية التي نشهدها حاليًا أحدثت الكثير من المتغيرات الجذرية، فجاءت الكتب الدراسية متسمة بالحداثة والمرونة، والتوافق في موضوعاتها مع مستويات أبنائنا الطلبة والطالبات، وخصائص نموهم العقلي والنفسي، وثقافتهم الاجتماعية، واهتمت بالجوانب المهارية والفنية؛ تحقيقًا لمبدأ أصيل من مبادئ فلسفة التربية وبناء الشخصية المتكاملة للفرد، وعززت دور المتعلم في عملية التعليم من خلال إكسابه مهارات التعلم الذاتي والتعلم التعاوني، ولم يعد الكتاب المدرسي إلا دليلًا يسترشد به الطالب للوصول إلى ما تختزنه مصادر المعلومات المختلفة، كالمراجع المكتبية، ومصادر التعلم الإلكترونية الأخرى وعلى الطالب القيام بعملية البحث والتقصي للوصول إلى ما هو أعمق وأشمل.

وستظل الوزارة بإذن الله في سعي مستمر لتطوير العملية التعليمية بما يحقق البناء المنشود ويواكب متطلبات التنمية.

والله ولي الهداية والتوفيق ؛؛؛

وزارة التربية والتعليم والبحث العلمي

http://E-learning-moe.edu.ye

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي – الجزء الثاني » كحلقة ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية (١ –٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية تم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لاغموض فيه ولاتعقيد ، حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط ويكون النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

ومقارنة بالكتب السابقة فإن هذا الكتاب وما يرافقه من كتاب التمارين ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما تحفز المدرسين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم والبحث العلمى أن يظل التطوير فى نمو وتطور مستمرين، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء استراتيجيات تهدف إلى تقديم الأجود (مادة وطريقة) ؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا كافة ذوي العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

فريق التطوير

http://E-learning-moe.edu.ye

المحتويات

الموضوع		الصفحة
الوحدة السادسة : حل المعادلات والمتراجحات		٧
٦ – ١	حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد	٧
٦ – ٢	مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية	١٠
٦ – ٣	تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلِمَ جذراها	١٣
٦ – ٤	اتحاد وتقاطع الفترات	١٦
٦ – ٥	متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد	١٩
٦ – ٦	متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد	٢٢
٦ – ٧	القيمة المطلقة	٢٧
٦ – ٨	حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد	٣٣
٦ – ٩	متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين	٣٥
٦ – ١٠	حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين	٣٩
الوحدة السابعة : حساب المثلثات		٤١
٧ – ١	الزاوية الموجهه	٤١
٧ – ٢	وحدات قياس الزوايا	٤٨
٧ – ٣	النسب المثلثية	٥١
٧ – ٤	العلاقات بين النسب المثلثية	٥٩
٧ – ٥	استخدام الآلة الحاسبة في حساب المثلثات	٦٥
٧ – ٦	حل المثلث القائم	٦٧
٧ – ٧	تطبيقات على حل المثلث القائم	٧٠
الوحدة الثامنة : الهندسة الإحداثية والتحويلات		٧٢
٨ – ١	مراجعة	٧٢
٨ – ٢	ميل المستقيم	٧٣
٨ – ٣	معادلة المستقيم	٧٧

http://E-learning-moe.edu.ye

تابع المحتويات

الموضـــوع	الصفحة
٨ – ٤ بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم	٨٣
٨ – ٥ الانعكاس تحليلياً	٨٦
٨ – ٦ الانسحاب تحليلاً	٩٠
الوحدة التاسعة : المتجهـــات	٩٣
٩ – ١ المتجهات	٩٣
٩ – ٢ تمثيل العمليات على المتجهات هندسياً	٩٩
٩ – ٣ توازي وتعامد متجهين	١٠٣
٩ – ٤ متجه الوحدة	١٠٦
٩ – ٥ الضرب الداخلي لمتجهين	١٠٨
الوحدة العاشرة : الرمز مجـ مدلولة وخواصه	١١٤
١٠– ١ الرمز (مجـ) مدلوله وخواصه	١١٤
١٠ – ٢ مقاييس النزعة المركزية	١١٧
١٠ – ٣ مقاييس التشتت	١٢١

http://E-learning-moe.edu.ye

٦ : ١ حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

تعلم أن الصورة العامة للمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد (والمعادلة التربيعية) هي :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ؛ حيث أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠ .

ولقد سبق لك حل هذه المعادلة بطرق مختلفة منها التحليل ، إكمال المربع والقانون العام ، مع العلم بأن طريقة القانون العام تعتبر طريقة عامة لحل أي معادلة من الدرجة الثانية ويعطى بالصيغة التالية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

حيث أ : معامل س^{٢} ، ب : معامل س ، جـ : الحد المطلق .

ويسمى المقدار « ب^{٢} – ٤ أ جـ » مميز معادلة الدرجة الثانية ويرمز له بالرمز « Δ » ويقرأ دلتا .

∴ Δ = ب^{٢} – ٤ أ جـ وهو الذي يحدد طبيعة جذري المعادلة التربيعية .

ولحل المعادلة التربيعية يمكننا أن نميز الحالات التالية :

١) إذا كان Δ > ٠ فإن $\sqrt{\Delta} \in$ ح ويكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

هما $\left(\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ} \right)$.

٢) إذا كان Δ = ٠ فإن $\sqrt{\Delta} =$ ٠ $\in$ ح ، ويكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

هما $\left(\frac{-ب}{٢ أ} \right)$.

٣) إذا كان Δ < ٠ فإن $\sqrt{\Delta} \notin$ ح ، وبالتالي ليس للمعادلة جذور حقيقية .

مثال (٦ – ١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

١) ٦ س^{٢} + ٤ س – ١ = ٠ .

٢) س (س – ٤) = –٤ .

٣) ٢ س^{٢} + ٣ س + ٢ = ٠ .

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـل

١) أ = ٦ ، ب = ٤ ، جـ = −١ .

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ٦ \times (-١) = ١٦ + ٢٤ = ٤٠$.

$\therefore \Delta > ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$.

$\therefore س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٤٠}}{٦ \times ٢} = \frac{-٤ \pm ٢\sqrt{١٠}}{١٢} = \frac{(-٢ \pm \sqrt{١٠})}{٦}$.

أي أن $س_{١} = \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦}$ ، $س_{٢} = \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{ \frac{-٢ + \sqrt{١٠}}{٦} ، \frac{-٢ - \sqrt{١٠}}{٦} \right\}$.

٢) س (س − ٤) = − ٤

$س^{٢} - ٤ س = -٤ \Leftarrow س^{٢} - ٤ س + ٤ = ٠$.

أ = ١ ، ب = − ٤ ، جـ = ٤ .

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times ٤$

$\Delta = ١٦ - ١٦ = ٠$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان(أو نقول بأن للمعادلة جذراً حقيقياً واحداً).

$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ $\therefore س = \frac{-ب}{٢أ}$.

$\therefore س = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{ ٢ \}$.

٣) أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = ٢ .

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$\Delta = ٩ - ٤ \times ٢ \times ٢$

$\Delta = ٩ - ١٦ = -٧$.

$\therefore \Delta < ٠$ ليس للمعادلة حلاً في ح .

$\therefore$ مجموعة الحل $= \varnothing$.

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٦ - ٢) أوجد قيم د التي تجعل جذرى المعادلة ٧٥ س^{٢} + ٧ د س + ١٢ = ٠ متساويان.

الحـــل

أ = ٧٥ ، ب = ٧ د ، جـ = ١٢ .

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ = (٧ د)^{٢} - ٤ \times ٧٥ \times ١٢ = ٤٩ د^{٢} - ٣٦٠٠$

لكي يكون الجذران متساويان يجب أن يكون $\Delta = ٠$.

أي أن : $٤٩ د^{٢} - ٣٦٠٠ = ٠ \Leftarrow ٤٩ د^{٢} = ٣٦٠٠$ ،

$د^{٢} = \frac{٣٦٠٠}{٤٩} \Leftarrow د = \pm \sqrt{\frac{٣٦٠٠}{٤٩}}$.

$د = \pm \frac{٦٠}{٧} = \pm ٨ \frac{٤}{٧}$.

مثال (٦ - ٣) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ثلاثة أمتار . فإذا كانت مساحتها تساوي ٤٠ متراً مربعاً ، فأوجد بُعدي قطعة الأرض .

الحـــل

نفرض أن عرض قطعة الأرض بالأمتار = س .

فيكون طولها = س + ٣

∵ مساحة قطعة الأرض = ٤٠ م^{٢} .

∴ العرض × الطول = ٤٠

[مساحة المستطيل = الطول × العرض]

س (س + ٣) = ٤٠

س^{٢} + ٣ س = ٤٠

س^{٢} + ٣ س - ٤٠ = ٠

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = - ٤٠ ، ∵ $\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

∴ $\Delta = ٩ - ٤ \times ١ \times (-٤٠) = ١٦٩$

∵ $\Delta > ٠ \Leftarrow$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$.

$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٦٩}}{٢} = \frac{-٣ \pm ١٣}{٢}$

∴ $س_{١} = \frac{-١٦}{٢} = -٨$ (مرفوض لأن الطول يكون موجباً) ، $س_{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

∴ عرض قطعة الأرض = ٥ م ، طولها = ٨ م .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٦ : ١)

[١] أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام :

أ) $س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠$

ب) $٦ س^{٢} + ٤ س - ٢ = ٠$

جـ) $س^{٢} + س = -١$

د) $٣ س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠$

هـ) $٢ س + \frac{٣}{س} = ٧$

و) $ص^{٢} + ٦ ص + ٩ = ٠$

ز) $٩ س^{٢} + ١٢ س + ٢ = ٠$

ح) $\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٣}{٤} س + \frac{١}{٢} = ٠$

ط) $ل^{٢} - ٩ = ٠$

ي) $س^{٢} + ٢ س هـ + هـ^{٢} = ٠$

ك) $ص + ٣ = \frac{١}{٢ ص}$

ل) $م^{٢} - ٧ م = ٠$

م) $س^{٤} + س^{٢} = ٦$

ن) $٢ ص^{٢} - ٣ ص + ٥ = ٠$

س) $(س - ٣)^{٢} = ٢ س^{٢}$

ع) $٢ س^{٢} - ٣ س = ١$

ف) $س^{٢} + ٥ س + ٣ = ٠$

ص) $ص^{٢} - ٥,٥ ص = ١,٥$

[٢] بيّن أنّ $س = ٣$ جذر المعادلة $-س^{٢} + ٤ س - ٣ = ٠$ ، ثم أوجد الجذر الآخر

[٣] بيّن أن للمعادلة $٢ س^{٢} - س - ٣ = ٠$ جذرين في ح ، وأوجدهما .

[٤] لتكن المعادلة : $ب س^{٢} - س + ب - ٣ = ٠$. ما قيمة ب إذا كان أحد جذريها $= -١$.

[٥] أوجد قيمة (قيم) م التي تجعل جذري المعادلة $٣ س^{٢} - ٨ س + م = ٠$ متساويان .

[٦] أوجد قيمة (قيم) جـ التي تجعل جذري المعادلة $س^{٢} + (جـ - ١) س = ٢ جـ + ١$ متساويان .

[٧] ثلاثة أعداد متتالية مجموع مربعاتها ١٤٩ . أوجد هذه الأعداد .

[٨] عددان فرديان موجبان متتاليان . مربع مجموعهما يزيد على مجموع مربعيهما بمقدار ١٩٨ . فما العددان؟

[٩] مجموع عدد ومقلوبه يساوى $\frac{٢٩}{١٠}$ أوجد العدد .

٦ : ٢ مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية

أولاً : مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن $س_{١}$ ، $س_{٢}$ جذري المعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$. هل يمكن أن نعرف مجموعهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن $س_{١} = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$ ، $س_{٢} = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{٢ أ}$

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ مجموع الجذرين = $س_1 + س_2 = \left(\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}\right) + \left(\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}\right)$

$= \frac{-ب - \sqrt{\Delta} - ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$.

$س_1 + س_2 = \frac{-2ب}{2أ} = \frac{-ب}{أ}$

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ١)

للمعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ، $أ \neq 0$. جذران مجموعهما يساوي $\frac{-ب}{أ}$.

مثال (٦ – ٤) أوجد مجموع جذري المعادلة $2 س^2 - 3 س = 5$.

الحل $2 س^2 - 3 س - 5 = 0$ ، مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{3}{2}$.

مثال (٦ – ٥) أوجد مجموع جذري المعادلة $5 س^2 + 8 س + 4 = 0$.

الحل مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-8}{5}$.

نلاحظ في المثال (٦ – ٤) أن $\Delta > 0$. لذا للمعادلة جذران حقيقيان .

بينما في المثال (٦ – ٥) نجد أن $\Delta < 0$. لذا للمعادلة جذران غير حقيقيين .

مما سبق نؤكد على حساب Δ قبل البدء بالحل ، لأن دراستنا فقط على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح).

ثانياً : حاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية :

ليكن $س_1$ ، $س_2$ جذري المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ ؛ هل يمكن أن نعرف حاصل ضربهما دون أن نحل المعادلة ؟

نعلم أن $س_1 = \frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}$ ، $س_2 = \frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}$ ،

∴ حاصل ضرب الجذرين = $س_1 \times س_2 = \left(\frac{-ب - \sqrt{\Delta}}{2أ}\right)\left(\frac{-ب + \sqrt{\Delta}}{2أ}\right)$.

نلاحظ أن حاصل ضرب الجذرين هو فرق بين مربعين .

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\Delta - ب^{٢}}{٤ أ^{٢}}$

$= \frac{ب^{٢} - (ب^{٢} - ٤ أ جـ)}{٤ أ^{٢}} = \frac{ب^{٢} - ب^{٢} + ٤ أ جـ}{٤ أ^{٢}} = \frac{٤ أ جـ}{٤ أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ}$

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$.

نستنتج مما سبق المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦ : ٢)

للمعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$. **جذران حاصل ضربهما يساوي** $\frac{جـ}{أ}$.

مثال (٦ - ٦) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة $٥ س^{٢} + ٩ س + ٢ = ٠$.

الحل حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٥}$

مثال (٦ - ٧) أوجد حاصل ضرب جذري المعادلة $٣ س^{٢} + ٢ س + ٥ = ٠$.

الحل حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

نلاحظ في المثال (٦ - ٧) إن حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{٥}{٣}$ بالرغم من كون الجذرين غير حقيقيين ، لذا نؤكد مجدداً على حساب Δ قبل البدء في الحل لأن دراستنا على ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

مثال (٦ - ٨) بيّن أن س = −٣ جذراً للمعادلة $٣ س^{٢} + ٤ س - ١٥ = ٠$ ، ثم احسب الجذر الآخر.

الحل لكي نبيّن أن س = −٣ جذراً للمعادلة فإنه يجب أن يحققها .

نعوض عن س = −٣ في المعادلة .

الطرف الأيمن = $٣ \times ٩ - ١٢ - ١٥ = ٢٧ - ٢٧ = ٠$ = الطرف الأيسر .

∴ س = −٣ جذراً للمعادلة .

لحساب الجذر الآخر نستخدم مبرهنة مجموع الجذرين .

∵ مجموع الجذرين = $س_{١} + س_{٢} = \frac{-ب}{أ}$.

∴ $-٣ + س_{٢} = \frac{-٤}{٣}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

$س_2 = \frac{-٤}{٣} + ٣$

$س_2 = \frac{-٤ + ٩}{٣} = \frac{٥}{٣}$.

∴ الجذر الآخر = $\frac{٥}{٣}$.

تمارين ومسائل (٦ : ٢)

[١] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلات التالية :

أ) $٢ س^٢ + ٣ س + ١ = ٠$.

ب) $-٢ س^٢ + ٥ س + ٧ = ٠$.

جـ) $س^٢ - ٣ س = ١$.

د) $س^٢ + ١ = ٠$.

هـ) $\frac{١}{٢} س^٢ - ٣ س - ٤ = ٠$.

و) $٢٥ س^٢ - ٦٠ س + ٣٦ = ٠$.

[٢] حدّد نوع جذري كل من المعادلات الآتية :

أ) $س^٢ - ٣ س + ٤ = ٠$.

ب) $٣ س^٢ - ٥ س = ٢$.

جـ) $١٠ س^٢ - ١٣ س - ٣ = ٠$.

د) $٢ س^٢ - ١١ س + ١٥ = ٠$ ،

ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٣] بيّن أن للمعادلة $٢ س^٢ - ٦ س - ١٥ = ٠$ جذرين حقيقيين مختلفين ، ثم أوجد مجموعهما وحاصل ضربهما .

[٤] بيّن أن $س = \frac{١}{٣}$ جذر للمعادلة $١٥ س^٢ - ٢ س = ١$ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

[٥] ما قيمة هـ في المعادلة : $(هـ + ٣) س^٢ + ٢ س + ٢ هـ - ٤ = ٠$ إذا كان أحد جذريها ٢ ثم أوجد الجذر الآخر .

[٦] ما قيمة م في المعادلة : $٢ س^٢ - ٥ (م + ١) س + م - ٣ = ٠$ ، إذا كان أحد جذريها ١ ، ثم أوجد الجذر الآخر .

٦ : ٣ تكوين معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلِمَ جذراها

تعرفنا على الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية وهي : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ؛ ويمكن وضع هذه المعادلة في الصورة الآتية :

$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$ (بالقسمة على أ) .

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ $س^{٢} - (\frac{-ب}{أ}) س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$ ، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$.

∴ **$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) × س + حاصل ضرب الجذرين = ٠** .

بصورة عامة : إذا عُلِم جذرا المعادلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ فإن المعادلة تكتب بإحدى الصورتين :

١) $س^{٢} - (س_{١} + س_{٢}) س + س_{١} س_{٢} = ٠$.

٢) $(س - س_{١})(س - س_{٢}) = ٠$

مثال (٦ − ٩) كوّن المعادلة إذا كان : $س_{١} + س_{٢} = ٧$ ، $س_{١} س_{٢} = \frac{١}{٣}$.

حيث $س_{١}$ ، $س_{٢}$ جذرا المعادلة .

الحـــل

∵ $س^{٢} - (س_{١} + س_{٢}) س + س_{١} س_{٢} = ٠$

∴ $س^{٢} - ٧ س + \frac{١}{٣} = ٠$ (بالضرب في ٣) .

∴ $٣ س^{٢} - ٢١ س + ١ = ٠$.

مثال (٦ − ١٠) اكتب المعادلات التي لها جذران في الحالات الآتية :

أ) $س_{١} = ٥$ ، $س_{٢} = -٢$. ب) $س_{١} = \frac{٢}{٣}$ ، $س_{٢} = -\frac{١}{٤}$.

جـ) $س_{١} = -٢ + \sqrt{٥}$ ، $س_{٢} = -٢ - \sqrt{٥}$.

الحـــل أ) $س_{١} + س_{٢} = ٥ + (-٢) = ٣$

$س_{١} س_{٢} = ٥ \times -٢ = -١٠$

∴ $س^{٢} - (س_{١} + س_{٢}) س + س_{١} س_{٢} = ٠$

∴ $س^{٢} - ٣ س - ١٠ = ٠$.

http://E-learning-moe.edu.ye

حل آخر :

يمكن كتابة المعادلة بالصورة: (س − س$_1$) (س − س$_2$) = ٠

المعادلة هي : (س − ٥) (س − (−٢)) = ٠

(س − ٥) (س + ٢) = ٠

س^2 + ٢ س − ٥ س − ١٠ = ٠ بفك الأقواس .

س^2 − ٣ س − ١٠ = ٠ .

ب) س$_1$ + س$_2$ = $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{٣-٨}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$.

س$_1$ س$_2$ = $\frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{٤} = \frac{-١}{٦}$.

∵ س^2 − (س$_1$ + س$_2$) س + س$_1$ س$_2$ = ٠

∴ س^2 − $\frac{٥}{١٢}$ س − $\frac{١}{٦}$ = ٠ (بالضرب في ١٢) .

∴ ١٢ س^2 − ٥ س − ٢ = ٠ .

جـ) س$_1$ + س$_2$ = −٢ + $\sqrt{٥٧}$ − ٢ − $\sqrt{٥٧}$ = −٤ .

س$_1$ س$_2$ = (−٢ + $\sqrt{٥٧}$) (−٢ − $\sqrt{٥٧}$) = (−٢)^2 − $\sqrt{٥٧}$ ٢ + ٢ $\sqrt{٥٧}$ − ($\sqrt{٥٧}$)^2 .

= ٤ − ٥ = −١ .

∵ س^2 − (س$_1$ + س$_2$) س + س$_1$ س$_2$ = ٠

∴ س^2 + ٤ س − ١ = ٠ .

تمارين ومسائل (٦ : ٣)

[١] كوّن المعادلات التي تتصف بالشروط التالية :

أ) س$_1$ + س$_2$ = ٣ ، س$_1$ س$_2$ = −٦ . ب) س$_1$ + س$_2$ = $\frac{١}{٢}$ ، س$_1$ س$_2$ = $\frac{-١}{٤}$.

جـ) س$_1$ + س$_2$ = −٣ ، س$_1$ س$_2$ = ٠ . د) س$_1$ + س$_2$ = ٢ ، س$_1$ س$_2$ = $\frac{-٢}{٥}$.

هـ) س$_1$ + س$_2$ = ٠ ، س$_1$ س$_2$ = −٣ . و) س$_1$ + س$_2$ = −٥ ، س$_1$ س$_2$ = $\frac{٣}{٥}$.

[٢] كوّن المعادلات التي جذراها كما يأتي :

أ) س$_1$ = ٣ ، س$_2$ = −٤ . ب) س$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ، س$_2$ = $\frac{-٢}{٣}$.

جـ) س$_1$ = ٢ ، س$_2$ = $\frac{١}{٥}$. د) س$_1$ = −٤ ، س$_2$ = ٠

http://E-learning-moe.edu.ye

[٣] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة ٦ س^{٢} – ١٣ س – ٥ = ٠ .

[٤] أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة س^{٢} – (هـ + ١) س – هـ^{٢} = ٠ ، بدلالة هـ .

[٥] لدينا المعادلة هـ س^{٢} – ٢ (هـ + ١) س + هـ – ٢ = ٠ ، هـ ≠ ٠ :

أ) أوجد مجموع الجذرين ، وحاصل ضربهما بدلالة هـ .

ب) حل المعادلات في الحالات الآتية : هـ = ١ ، هـ = ٢ ، هـ = –١ .

٦ : ٤ اتحاد وتقاطع الفترات

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي الفترات العددية ، وأنواعها وطريقة تمثيلها ، وللتذكير سوف نوردها بإيجاز على النحو التالي :

بفرض أن أ ، ب ∈ ح ، أ < ب تنقسم الفترات إلى ما يلي:

أولاً : الفترات المحدودة : وهي فترات طرفيها أعداد حقيقية ، ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة مغلقة مثـل : [أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب } .

٢ – فترة مفتوحة مثل :] أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ < س < ب } .

٣ – فترات نصف مفتوحة (نصف مغلقة) وهي فترات مفتوحة من طرف ومغلقة من الآخر وتشمل ما يلي :

- فترات مفتوحة من أسفل ومغلقة من أعلى مثل] أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب } .
- فترات مغلقة من أسفل ومفتوحة من أعلى مثل [أ ، ب [= { س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب } .

ثانياً : الفترات غير المحدودة : وهي فتـرات أحـد طرفيهـا أو كليهمـا = ± ∞ ويمكن تصنيفها على النحو التالي :

١ – فترة غير محدودة من طرفيها :] – ∞ ، ∞ [= { س : س ∈ ح } .

٢ – فترات غير محدودة من أعلى : وهي فترات لها حد سفلى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من أسفل مثل [أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س ≤ أ } .
- فترات محدودة من أسفل ولكن مفتوحة مثل] أ ، ∞ [= { س : س ∈ ح ، س < أ } .

٣ – فترات غير محدودة من أسفل : وهي فترات لها حد علوى فقط وتنقسم إلى القسمين التاليين :

- فترات محدودة ومغلقة من أعلى مثل] – ∞ ، أ] = { س : س ∈ ح ، س ≥ أ } .
- فترات محدودة من اعلى ولكن مفتوحة مثل] –∞ ، أ [= { س : س ∈ ح ، س > أ } .

تـذكـــر أن :

- **عند كتابة الفترات نبدأ بالطرف السفلي دائماً .**
- **نمثل الطرف المفتوح في مجموعة الحل بدائرة (غير مظللة) لتدل على عدم انتمائه إلى مجموعة الحل كما نمثل الطرف المغلق فيها بدائرة (مظللة) لتدل على انتمائه إلى مجموعة الحل .**

http://E-learning-moe.edu.ye

تعريف (٦ : ١)

لتكن $ف_١$ ، $ف_٢$ ، فترتين عدديتين ؛ فإنه يكون :

١) $س \in (ف_١ \cap ف_٢) \Leftrightarrow (س \in ف_١) \wedge (س \in ف_٢)$.

٢) $س \in (ف_١ \cup ف_٢) \Leftrightarrow (س \in ف_١) \vee (س \in ف_٢)$.

ويمكن تعميم ذلك لأكثر من فترتين .

مثال (٦ - ١١) لتكن : $ف_١ = [٢ ، ٥]$ ، $ف_٢ =]١ ، ٤[$ ، $ف_٣ = [٤ ، ٥]$ ،

$ف_٤ =]-٢ ، ١]$ ، $ف_٥ = [-٣ ، \infty[$ ، $ف_٦ =]-\infty ، -٣[$. أوجد كلاً من :

١) $ف_١ \cap ف_٤$ ، ٢) $ف_١ \cap ف_٢$ ، ٣) $ف_٢ \cup ف_٣$ ،

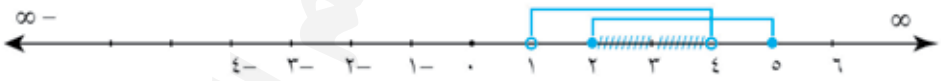
٤) $ف_١ \cap ف_٣$ ، ٥) $ف_١ \cup ف_٣$ ، ٦) $ف_٥ \cup ف_٦$ ،

٧) $ف_٤ \cap ف_٦$ ، ٨) $ف_٣ \cup ف_٥$ ، ٩) $ف_٣ \cap ف_٥$.

الحـــل

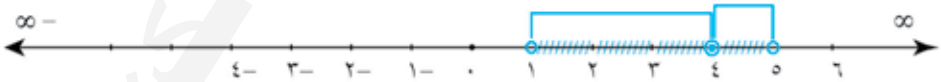
١ - $ف_١ \cap ف_٤ = [٢ ، ٥] \cap]-٢ ، ١] = \varnothing$.

٢ - $ف_١ \cap ف_٢ = [٢ ، ٥] \cap]١ ، ٤[= [٢ ، ٤[$ [شكل (٦-١)] .



شكل (٦ - ١)

٣ - $ف_٢ \cup ف_٣ =]١ ، ٤[\cup [٤ ، ٥] =]١ ، ٥]$.



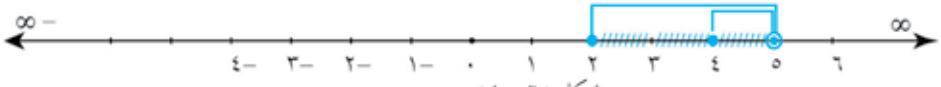
شكل (٦ - ٢)

٤ - $ف_١ \cap ف_٣ = [٢ ، ٥] \cap [٤ ، ٥] = [٤ ، ٥]$.



شكل (٦ - ٣)

٥ - $ف_١ \cup ف_٣ = [٢ ، ٥] \cup [٤ ، ٥] = [٢ ، ٥]$.



شكل (٦ - ٤)

http://E-learning-moe.edu.ye

٦ – ف$_{٥}$ ∪ ف$_{٦}$ = [–٣ ، ∞ [∪] –∞ ، –٣ [=] –∞ ، ∞ [.



شكل (٦ – ٥)

٧ – ف$_{٤}$ ∩ ف$_{٦}$ =] –٢ ، ١ [∩] –∞ ، –٣ [= ∅ .

٨ – ف$_{٣}$ ∪ ف$_{٥}$ = [٤ ، ٥ [∪] –٣ ، ∞ [=] –٣ ، ∞ [.

٩ – ف$_{٣}$ ∩ ف$_{٥}$ = [٤ ، ٥ [∩] –٣ ، ∞ [= [٤ ، ٥ [.

تمارين ومسائل (٦ : ٤)

[١] عبر عن كلٍّ من الأشكال التالية باستخدام الفترات :

أ)



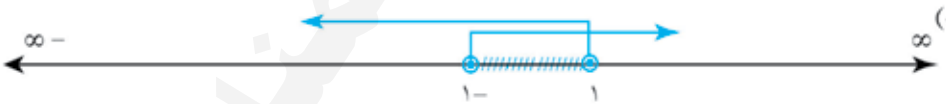
شكل (٦ – ٦)

ب)



شكل (٦ – ٧)

جـ)



شكل (٦ – ٨)

د)



شكل (٦ – ٩)

[٢] أيٌّ العبارات التالية صحيحة وأيها خطأ :

أ) [–٥ ، ∞ [∪] –∞ ، –٨ [= ح /] –٨ ، –٥ [.

ب)] –٢ ، ٣ [∩] ٣ ، ∞ [= ∅ .

جـ)] –٦ ، ٣ [∪] ٥ ، ∞ [=] ٥ ، ∞ [.

http://E-learning-moe.edu.ye

[٣] إذا كانت : ف١ = [٥ ، ∞ [، ف٢ =] ٤ ، ∞ [، ف٣ =] −∞ ، ٣ [،
ف٤ =] −٥ ، ٧ [، ف٥ =] ٣ ، ٦ [، ف٦ =] −٣ ، ٢ [. فأجب عمّا يأتي :

أ) مثل الفترات السابقة بيانياً .

ب) أوجد كلاً من : ١) (ف١ ∪ ف٢) . ٢) (ف٥ ∩ ف٤) . ٣) (ف٦ ∩ ف٣) .
٤) ف١ ∪ ف٥ . ٥) ف٣ ∩ ف٤ . ٦) ف٢ ∪ ف٣ .
٧) ف٦ ∩ ف١ . ٨) ف٤ ∩ ف٢ . ٩) ف١ ∪ ف٦ .

٦ : ٥ متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

تعريف (٦ : ٢)

لتكن حـ١ (س)، حـ٢ (س) حدوديتين من الدرجة الأولى في متغير واحد فإن الصيغ الجبرية التالية :

حـ١ (س) ≤ حـ٢ (س) ، حـ١ (س) ≥ حـ٢ (س) ،

حـ١ (س) > حـ٢ (س) ، حـ١ (س) < حـ٢ (س) ،

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى في متغير واحد .

تدريب (٦−١) بيّن أياً من المتراجحات التالية من الدرجة الأولى في متغير واحد ؟

١) ٣ س − ١ > ٤ س + ٢ . ٢) ٣ س − ص < ٤ س + ١ .

٣) $\frac{٤ س - ٣}{٥} \geq ٦$. ٤) ٤ س^{٢} − ٣ س ≤ ٢ .

حل متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد :

حل المتراجحة يعني إيجاد مجموعة جزئية من ح بحيث لو عوضنا بأي عنصر منها عن متغير المتراجحة نحصل على قضية صائبة .

يقوم حل المتراجحة على الانتقال من المتراجحة المفروضة إلى متراجحات مكافئة على التعاقب باستخدام التحويلات المكافئة إلى أن نصل إلى متراجحة واضحة الحل مثل : س ≤ أ حيث أ ∈ ح .

فتكون مجموعة الحل = { س : س ∈ ح ، س ≤ أ } .

ويمكن التعبير عن مجموعة الحل بالصورة : س ∈ [أ ، ∞ [، وقد نكتفي بالقول أن مجموعة حل المتراجحة = [أ ، ∞ [.

http://E-learning-moe.edu.ye

تمثيل حل متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد بيانياً :

يقصد بتمثيل الحل بيانياً تحديد مجموعة الحل على شكل فترة جزئية من خط الأعداد « بتظليلها أو بإعطائها لون مغاير »

تـذكـــر أن :

- إضافة أو طرح أي عدد حقيقي إلى طرفي المتراجحة لايعكس ترتيبها
- قسمة أو ضرب طرفيها بعدد حقيقي موجب لا يغير ترتيبها ايضاً .
- إيجاد مقلوبي طرفيها أو ضربهما في عدد حقيقي سالب يغير ترتيبها .

مثال (٦ - ١٢) حل المتراجحة : $٣س + ٢ > ٢س - ٣$ جبرياً .

الحـــل

$٣س + ٢ > ٢س - ٣$ $\Leftarrow$ $٣س - ٢س + ٢ > ٢س - ٢س - ٣$ (بطرح ٢س من الطرفين)

$\Leftarrow$ $س + ٢ - ٢ > -٣ - ٢$ (بطرح ٢ من الطرفين) .

$\Leftarrow$ $س > -٥$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-٥ ، \infty[$.

مثال (٦ - ١٣) أوجد مجموعة حل المتراجحة : $س + ٤ \geq ٩س$ جبرياً ومثلها بيانياً .

الحـــل

$س + ٤ \geq ٩س$ (بطرح ٩ س من الطرفين)

$\Leftarrow$ $س - ٩س + ٤ \geq ٩س - ٩س$

$\Leftarrow$ $-٨س + ٤ - ٤ \geq -٤$ (بطرح ٤ من الطرفين)

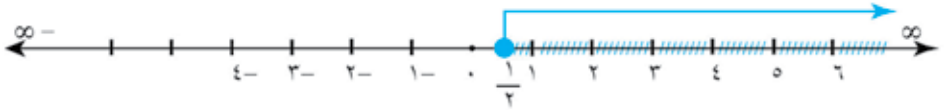
$\Leftarrow$ $-٨س \geq -٤$ (بضرب الطرفين في $-\frac{١}{٨}$)

$\Leftarrow$ $-\frac{١}{٨} \times -٨س \leq -\frac{١}{٨} \times -٤$

$\Leftarrow$ $س \leq \frac{١}{٢}$

$\therefore$ مجموعة الحل $=]\frac{١}{٢} ، \infty[$.

ويمكن تمثيلها بيانياً كالتالي :



شكل (٦ - ١٠)

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٦ - ١٤) حل المتراجحة : $\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} < \frac{٤س}{٣} + ٢$.

الحـــل

$$\frac{٣}{٥} - \frac{٢س - ١}{١٥} < \frac{٤س}{٣} + ٢ .$$

$$\Leftarrow ١٥ \times \frac{٣}{٥} - (\frac{٢س - ١}{١٥}) ١٥ < \frac{٤س}{٣} \times ١٥ + ٢ \times ١٥$$

$$\Leftarrow ٩ - (٢س - ١) < ٢٠س + ٣٠$$

$$\Leftarrow ٩ - ٢س + ١ < ٢٠س + ٣٠$$

$$\Leftarrow -٢س + ١٠ < ٢٠س + ٣٠$$

$$\Leftarrow -٢٢س + ١٠ - ١٠ < ٣٠ - ١٠$$

$$\Leftarrow -٢٢س < ٢٠$$

$$\Leftarrow -\frac{١}{٢٢} \times -٢٢س > -\frac{١}{٢٢} \times ٢٠$$

$$\Leftarrow س > -\frac{٢٠}{٢٢} .$$

$$\Leftarrow س > -\frac{١٠}{١١} .$$

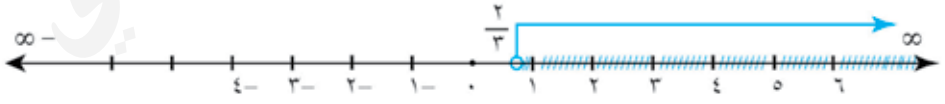
$$\therefore \text{مجموعة الحل} =]-\frac{١٠}{١١} ، -\infty[.$$

مثال (٦ - ١٥) أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : $٣س - ٢ > ٠$ ومثلها بيانياً .

الحـــل

$$٣س - ٢ > ٠ \Leftarrow ٣س > ٢ \Leftarrow س > \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} =]\frac{٢}{٣} ، \infty[.$$



شكل (٦ - ١١)

ملاحظة : لقد مثلنا العدد $\frac{٢}{٣}$ بدائرة غير مظللة لأنه لاينتمي إلى مجموعة حل المتراجحة .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٦ : ٥)

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الخيارات المرفقة لكل سؤال مما يأتي : حيث س ∈ ح .

١ – إذا كانت : ٢ س – ٣ < ١ فإن :

أ) س ≤ ٢ . ب) س ∈] ٢ ، ∞ [. جـ) س ∈] ٢ ، ∞ [.

٢ – إذا كانت : ٣ + ٢ س ≤ – س فإن :

أ) س ∈] –١ ، ∞ [. ب) س > ١ . جـ) س > –١ .

٣ – إذا كانت : س – ٣ < ٤ س + ١ فإن :

أ) س ∉] $-\frac{٤}{٣}$ ، ∞ [. ب) س > $-\frac{٣}{٤}$. جـ) س < $-\frac{٤}{٣}$.

[٢] حدد بإشارة (√) متراجحة الدرجة الأولى في متغير واحد مما يأتي وما عداها بإشارة (X) :

أ) ١ – ٢ س > ٠ ( ) ب) $\frac{٢س - ١}{س} < \frac{س + ٢}{٣}$ ( )

جـ) ٢ س + $\frac{٣}{س}$ > ٢ ( ) د) ٤ س – ٢ ≥ س (س + ١) ( )

[٣] أوجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية ومثلها بيانياً :

أ) س + ٣ ≤ ٠ . ب) ٢ س – ١ > ٥ س + ٢

جـ) ٩ س – ٣ ≥ ٢ س + ٤ . د) ٥ س < ٦ س – ٣ .

هـ) – س + ٢ ≥ ٢ س – ١ . و) $\frac{٦س + ١}{٣} < \frac{٥س}{٣}$.

٦ : ٦ متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد

سبق أن درست في الصف التاسع الأساسي كيف توجد مجموعة حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد، إمَّا بالتحليل ، أو باستخدام القانون العام ، بعد أن تضعها في صورتها العامة :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

فإذا استبدلنا إشارة التساوي في المعادلة السابقة بإحدى إشارات التراجح : < ، ≤ ، ≥ ، > نحصل على متراجحة من الدرجة الثانية في متغير واحد في إحدى صورها العامة :

أ س^{٢} + ب س + جـ ≤ ٠

حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد :

لإيجاد مجموعة حل متراجحة الدرجة الثانية في متغير واحد نتبع ما يأتي :

١ – نجعلها بصورة متراجحة صفرية .

٢ – نحدد إشارة المقدار الثلاثي : أ س^{٢} + ب س + جـ

http://E-learning-moe.edu.ye

من خلال دراسة إشارة حاصل ضرب عوامله على خط الأعداد قبل وبعد صفر (جذر) كل عامل ، على النحو التالي :

- نرسم خطوط الأعداد (تحت بعض) يزيد عددها عن عدد عوامل المقدار : أ س^{٢} + ب س + جـ بواحد .
- نختار لكل عامل من العوامل خطاً مستقيماً نحدد عليه صفر هـذا العامل وإشاراته قبل وبعـد صفره (جذره) .
- نحدد إشارات حاصل ضرب العاملين على خط الأعداد الاخير قبل وبعد أصفار المقدار (جذوره) فتكون هي إشارات المقدار : أ س^{٢} + ب س + جـ .
- مجموعة حل المتراجحة هي الفترات التي إشارات المقدار فيها تحقق المتراجحة المعطاة .

مثال (٦ - ١٦) أوجد مجموعة حل المتراجحة : (س – ١) (س –٢) ≥ ٠

الحـــل

للمقدار جذران هما س$_{١}$ = ١ أو س$_{٢}$ = ٢ .



شكل (٦ – ١٢)

من الشكل نلاحظ على خط إشارات حاصل الضرب أن : (س – ١) (س – ٢) ≥ ٠ تتحقق في الفترة [١ ، ٢] ∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

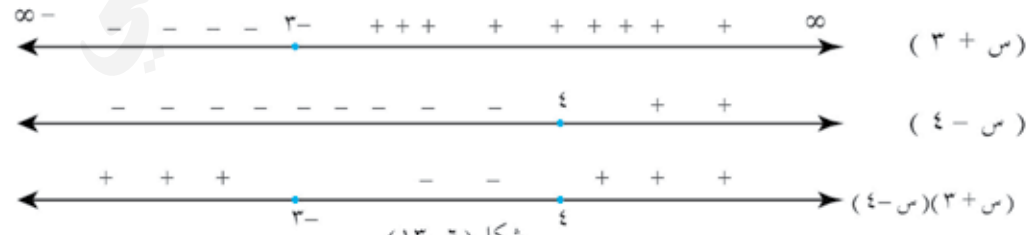
مثال (٦ - ١٧) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س + ١٢ ≥ س^{٢} .

الحـــل

س + ١٢ ≥ س^{٢} ⇔ – س^{٢} + س + ١٢ ≥ ٠ ⇐ س^{٢} – س – ١٢ ≤ ٠

⇐ (س – ٤) (س + ٣) ≤ ٠ .

للمقدار س^{٢} – س – ١٢ جذران هما س$_{١}$ = –٣ أو س$_{٢}$ = ٤



شكل (٦ – ١٣)

http://E-learning-moe.edu.ye

من الشكل نجد أن (س – ٤) (س + ٣) ≤ ٠ تتحقق في الفترتين [٤ ، ∞ [،] – ∞ ، –٣].
مجموعة حل المتراجحة =] – ∞ ، –٣] ∪ [٤ ، ∞ [.

قاعدة هامة :

يمكننا تحديد إشارة المقدار الثلاثي : أ س^{٢} + ب س + جـ جبرياً ودون اللجـوء إلى خطـوط الإعداد كما يلي :

- إذا كان للمقدار جذران حقيقيان مختلفان (أي أن Δ > ٠) فإن إشارته تكون مخالفة لإشارة معامل س^{٢} أي إشارة (أ) في فترة ما بين الجذرين ، وتكون مساوية لها في الفترات الواقعة خارج الجذرين ، ويضاف الجذران في حالة وجود إشارة التساوي مع علامة التراجح .
- إذا لم يكن للمقدار جذران حقيقيان (أي أن Δ < ٠) فإن :إشارته تتبع إشارة معامل س^{٢}(أي إشارة أ) ∀ س ∈ ح.

مثال (٦ – ١٨) أوجد مجموعة حل المتراجحة : –٢ س^{٢} + س – ١ < ٠ .

الحـــل أ = –٢ < ٠ ، ب = ١ ، جـ = –١ ، Δ = ١ – ٨ = –٧ < ٠ .

∴ مجموعة حل المتراجحة = ∅ .

(إشارة المتراجحة مخالفة لإشارة أ) .

مثال (٦ – ١٩) أوجد مجموعة حل المتراجحة : ٥ س^{٢} – ٤ س + ١٢ < ٠ .

الحـــل أ = ٥ > ٠ ، ب = –٤ ، جـ = ١٢ ، Δ = ١٦ – ٢٤٠ < ٠ .

ليس للمعادلة جذرين حقيقيين

أ > ٠ ، Δ < ٠ .

∴ مجموعة حل المتراجحة = ح .

مثال (٦ – ٢٠) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س^{٢} – ٣ س + ٢ ≥ ٠ .

الحـــل أ = ١ > ٠ ، ب = –٣ ، جـ = ٢ ، Δ = ٩ – ٨ < ٠

⇐ للمقدار جذران حقيقيان

⇐ (س – ١) (س – ٢) ≥ ٠ .

⇐ جذرا المقدار هما س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٢

∴ مجموعة حل المتراجحة = [١ ، ٢] .

« إشارة المقدار مخالفة لإشارة أ في فترة ما بين الجذرين . وأضفنا الجذرين لأن " = " موجودة مع إشارة التراجح » .

مثال (٦ – ٢١) أوجد مجموعة حل المتراجحة : س^{٢} – س – ٦ < ٠ .

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −٦ ، Δ = ١ + ٢٤ > ٠

للمقدار س^{٢} − س − ٦ جذران حقيقيان ⇐ (س − ٣) (س + ٢) > ٠

جذرا المقدار هما س$_{١}$ = ٣ أو س$_{٢}$ = −٢ ، أ > ٠

⇐ مجموعة الحل =] − ∞ ، −٢ [∪] ٣ ، ∞ [(خارج الجذرين) .

المتراجحات الكسرية :

هي المتراجحات التي تحوي كسر في أحد طرفيها أو في كليهما ، بحيث يكون المقام حدودية .

مثال (٦ − ٢٢) حل المتراجحة : $\frac{س^{٢}-١}{٢س+٣} \leq ٢(س+١)$.

الحـــل

$$\frac{س^{٢}-١}{٢س+٣} \leq ٢(س+١) \Leftrightarrow \frac{س^{٢}-١}{٢س+٣} - ٢(س+١) \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^{٢}-١-٢(س+١)(٢س+٣)}{٢س+٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{س^{٢}-١-٤س^{٢}-٦س-٤س-٦}{٢س+٣} \leq ٠$$

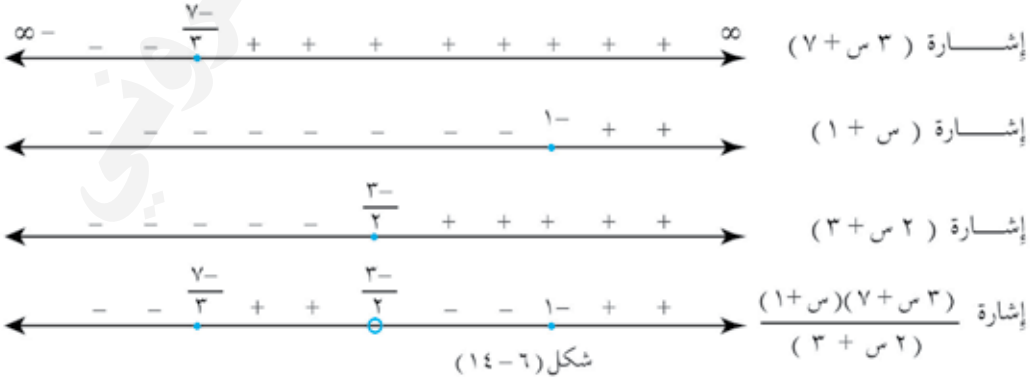
$$\Leftarrow \frac{-٣س^{٢}-١٠س-٧}{٢س+٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{-(٣س^{٢}+١٠س+٧)}{٢س+٣} \leq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{٣س^{٢}+١٠س+٧}{٢س+٣} \geq ٠$$

$$\Leftarrow \frac{(٣س+٧)(س+١)}{٢س+٣} \geq ٠$$

أصفار المقام: س$_{١}$ = $-\frac{٣}{٢}$ ، أصفار البسط : س$_{٢}$ = $-\frac{٧}{٣}$ أو س$_{٣}$ = −١ .



شكل (٦ − ١٤)

http://E-learning-moe.edu.ye

من الشكل نجد أن : $\frac{(٣س+٧)(س+١)}{٢س+٣} \geq ٠$ يتحقق في الفترتين $]-\infty ، \frac{-٧}{٣}[$

أو $]-\frac{٣}{٢} ، -١[$.

∴ مجموعة الحل للمتراجحة المعطاه $=]-\infty ، -\frac{٧}{٣}[\cup]-\frac{٣}{٢} ، -١[$

لحل المتراجحات الكسرية التي تحوي في كل من بسطها ومقامها حدودية نتبع ما يلي :

١ – نحولها إلى متراجحة صفرية ، ثم نجمع الطرف الأيمن في كسر واحد .

٢ – نوجد أصفار البسط والمقام ونحددها على خط الإعداد .

٣ – نحدد إشارة كل عامل قبل وبعد جذره (صفره) على خط الإعداد .

٤ – نوجد إشارة حاصل ضرب عوامل البسط وإشارة حاصل ضرب عوامل المقام .

٥ – نوجد ناتج قسمة إشارة البسط على إشارة المقام .

٦ – نحدد الفترات التي تكون فيها الإشارة محققة للمتراجحة المعطاة فتكون هي مجموعة الحل للمتراجحة المعطاة .

مثال (٦ – ٢٣) حل المتراجحة : $\frac{٣س^{٢}-٣س}{س+١} \leq ٢س-٢$.

الحل

$\frac{٣س^{٢}-٣س}{س+١} \leq ٢س-٢$

$\Leftarrow \frac{٣س^{٢}-٣س}{س+١} - ٢س+٢ \leq ٠ \Leftarrow \frac{٣س^{٢}-٣س+(س+١)(-٢س+٢)}{س+١} \leq ٠$

$\Leftarrow \frac{٣س^{٢}-٣س-٢س^{٢}-٢س+٢س+٢}{س+١} \leq ٠ \Leftarrow \frac{س^{٢}-٣س+٢}{س+١} \leq ٠ \Leftarrow \frac{(س-١)(س-٢)}{(س+١)} \leq ٠$

أصفار البسط : س = ١ أو س = ٢ . أصفار المقام : س = – ١ .

إشارة (س – ١)



إشارة (س – ٢)



إشارة (س + ١)



إشارة $\frac{(س-١)(س-٢)}{(س+١)}$



شكل (٦ – ١٥)

http://E-learning-moe.edu.ye

من الشكل نجد أن : $\frac{(س - ١)(س - ٢)}{(س + ١)} \leq ٠$ يتحقق في $]-١ ، ١]$ أو $[٢ ، \infty[$.

∴ مجموعة حل المتراجحة المعطاه = $]-١ ، ١] \cup [٢ ، \infty[$.

تمارين ومسائل (٦ : ٦)

* أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية :

١) $(س - ٣)(س + ٥) < ٠$.

٢) $٣س^{٢} - ٧س - ٦ \geq ٠$.

٣) $\frac{-٢س}{س - ٢} < ٥س - ٣$.

٤) $\frac{١}{س - ٢} \geq \frac{٣}{٣ - س}$.

٥) $س^{٢} - س - ٢٠ \leq ٠$.

٦) $\frac{١}{س} \leq س + ١$.

٧) $٢س^{٢} + ٣س + ٥ > ٠$.

٨) $٣س^{٢} - ٤س - ٥ \leq ٠$.

٩) $-٤س^{٢} + ٤س + ٣ > ٠$.

١٠) $س^{٢} + س - ٦ \geq ٠$.

١١ - $٣س^{٢} - ٥س - ٢ < ٠$.

١٢) $س^{٢} + ١ > ٠$.

١٣ - $-٣س^{٢} + ١٠س - ٧ \leq ٠$.

١٤) $٢س^{٢} - ٣س > ٠$.

٦ : ٧ القيمة المطلقة

من الأعداد ما هو سالباً ومنها ما هو موجباً ، ففي الكميات المتجهة مثل القوة والسرعة والإزاحة قد تستعمل الأعداد الموجبة أو الأعداد السالبة ، ولكننا عندما نتعامل مع الكميات غير المتجهة مثل الزمن والمسافة والمساحة والكتلة ، فإننا نستعمل الأعداد الموجبة دائماً ، والقيمة المطلقة تستعمل للدلالة على الكميات غير المتجهة أو لإيجاد موجب الكميات المتجهة .

تعريف (٦ : ٣)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي س يرمز لها بالرمز $|س|$ وهي عدد حقيقي يساوى س إذا كانت س غير سالبة ويساوى $-س$ إذا كانت س سالبة .

http://E-learning-moe.edu.ye

ويمكننا توضيح التعريف رمزياً كما يلي :

$$|س| = \begin{cases} س & \text{حيث } س \geq ٠ \\ -س & \text{حيث } س < ٠ \end{cases}$$

∴ |س| = بعد س عن الصفر .

١) $|س| \geq ٠$ ، $\forall س \in ح$

٢) $|س| = |-س|$ ، $\forall س \in ح$

فمثلاً : $|\frac{١}{٤}\ ٣| = ٣\frac{١}{٤}$ ، $|-٣\frac{١}{٤}| = ٣\frac{١}{٤}$ ،

$|١٫٤| = ١٫٤$ ، $|-١٫٤| = ١٫٤$ ، $|٠| = ٠$

إعادة تعريف القيمة المطلقة :

نفرض أن لدينا المقدار |س − ٩| ، عندما نريد أن نتعامل مع هذا المقدار يجب أن نعيد تعريفه وفقاً لتعريف القيمة المطلقة ، فالمقدار (س − ٩) إما أن يكون سالباً وإما أن يكون موجباً ، وإما أن يكون صفراً .

عندما تكون (س − ٩) موجباً يكون |س − ٩| = س − ٩ ،

عندما تكون (س − ٩) سالباً يكون |س − ٩| = −(س − ٩) = ٩ − س .

وعندما تكون (س − ٩) صفراً يكون |س − ٩| = ٠

أي أن :

$$|س - ٩| = \begin{cases} س - ٩ & \text{عندما } (س - ٩) > ٠ \\ ٠ & \text{عندما } (س - ٩) = ٠ \\ ٩ - س & \text{عند } (س - ٩) < ٠ \end{cases}$$

ويمكن تقديم التعريف بصورة اخرى :

$$|س - ٩| = \begin{cases} س - ٩ & \text{عند } س > ٩ \\ ٠ & \text{عند } س = ٩ \\ ٩ - س & \text{عند } س < ٩ \end{cases}$$

واضح اننا أعدنا تعريف |س − ٩| حول النقطة س = ٩ ونسمي س = ٩ صفر المقياس أو جذر المقياس وهو ما يجعل قيمة ما بداخل المقياس = ٠ .

مثال (٦ − ٢٤) أعد تعريف المقدار : $|س^{٢} + ٣س - ١٠|$.

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

$|س^{٢} + ٣س - ١٠| = |(س + ٥)(س - ٢)|$. أي أن للقيمة المطلقة صفران « جذران » هما :

$س_{١} = -٥$ ، $س_{٢} = ٢$

نعيد تعريف المقدار حول الجذرين :

$$|(س + ٥)(س - ٢)| = \begin{cases} س^{٢} + ٣س - ١٠ & \text{عند } س \leq ٢ \\ -س^{٢} - ٣س + ١٠ & \text{عند } -٥ < س < ٢ \\ س^{٢} + ٣س - ١٠ & \text{عند } س \geq -٥ \end{cases}$$

لإعادة تعريف القيمة المطلقة يجب أولاً أن نحدد أصفار القيمة المطلقة ، ثم نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول أصفارها (جذورها) .

مثال (٦ - ٢٥) أعد تعريف المقدار : $٢س - |س^{٢} - س - ٦|$.

الحـــل

المقدار $= ٢س - |(س - ٣)(س + ٢)|$. للقيمة المطلقة صفران هما : $س_{١} = -٢$ ، $س_{٢} = ٣$.

وعندما نعيد تعريف المقدار فإننا نعيد تعريف القيمة المطلقة (فقط) حول صفريها ضمن هذا المقدار ، فنحصل على :

$$٢س - |(س - ٣)(س + ٢)| = \begin{cases} ٢س - (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } س \leq ٣ \\ ٢س + (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } -٢ < س < ٣ \\ ٢س - (س^{٢} - س - ٦) & \text{عند } س \geq -٢ \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة :

إذا كانت $ا \in ح^{+}$ فإن :

١ - $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ ، $\sqrt{(س \pm ا)^{٢}} = |س \pm ا|$ ، $(\sqrt{|س|})^{٢} = س^{٢}$.

٢ - $|س| = ا \Leftrightarrow$ إما $س = ا$ أو $س = -ا$.

٣ - $|س| \geq ا \Leftrightarrow -ا \geq س \geq ا$.

$|س| > ا \Leftrightarrow -ا > س > ا$.

٤ - $|س| \leq ا \Leftrightarrow$ إما $ا \geq س$ أو $س \geq -ا$.

$|س| < ا \Leftrightarrow$ إما $ا > س$ أو $س > -ا$.

http://E-learning-moe.edu.ye

٥ - $\left|\frac{ص}{س}\right| = \frac{|ص|}{|س|}$ ، $|س \cdot ص| = |س| \cdot |ص|$ ، $س \neq$ صفر .

٦ - $|س + ص| \geq |س| + |ص|$ ، $|س - ص| \leq |س| - |ص|$.

ويظهر التباين عندما تكون س وَ ص من إشارتين مختلفتين .

المتراجحات المزدوجة :

نسمي المتراجحات من الشكل $أ < س < ب$ متراجحات مزدوجة ، إذ أنها مكونة من متراجحتين فرديتين، وكما نلاحظ أن المتراجحة $أ < س < ب$ تفرض ترتيباً على المجموعة $\{أ ، س ، ب\}$ حيث $أ ، ب \in ح$ وَ س متغير واقع بين أ ، ب .

حل المتراجحات المزدوجة :

لحل المتراجحات المزدوجة نطبق على المتراجحة المعطاة التحويلات المكافئة بنفس الأسلوب الذي نطبقها به على المتراجحات الفردية ؛ فتكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة مساوية لتقاطع مجموعتي الحل للمتراجحتين الفرديتين المكونة لها .

فمثلاً : $|س - أ| < ب \Leftrightarrow -ب < س - أ < ب$ [-ب أصغر من (س - أ) أصغر من ب].

$\Leftarrow$ $أ - ب < س < أ + ب$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل = $] أ - ب ، أ + ب [$.

آخر خطوات الحل يكون فيها المتغير محصور بين عددين ثابتين .

مثال (٦ - ٢٦) حل المتراجحتان :

أ) $|س| \geq ٥$

ب) $|٢س - ٦| \geq ١$.

الحـــل

أ) $|س| \geq ٥ \Leftrightarrow -٥ \geq س \geq ٥$

$\therefore$ مجموعة الحل = $[-٥ ، ٥]$.

http://E-learning-moe.edu.ye

ب) $|٢س - ٦| \geq ١ \Leftrightarrow -١ \geq ٢س - ٦ \geq ١$

$\Leftarrow ٥ \geq ٢س \geq ٧$

$\Leftarrow \frac{٥}{٢} \geq س \geq \frac{٧}{٢}$.

$\therefore$ مجموعة الحل = $[\frac{٥}{٢} ، \frac{٧}{٢}]$.

مثال (٦ - ٢٧) حل المتراجحة : $|س - ٣| < ٤$.

الحـــل

$|س - ٣| < ٤ \Leftarrow س - ٣ < ٤$ أو $س - ٣ < -٤$

$\Leftarrow س < ٧$ أو $س < -١$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل = $]-\infty ، -١[\cup]٧ ، \infty[$.

مثال (٦ - ٢٨) حل المتراجحة : $|س^٢ - س - ١| \geq ١$.

الحـــل

$|س^٢ - س - ١| \geq ١ \Leftrightarrow -١ \geq س^٢ - س - ١ \geq ١$

$\Leftrightarrow ٠ \geq س^٢ - س \geq ٢$

$\Leftarrow ٠ \geq س^٢ - س$ و $س^٢ - س \geq ٢$

$\Leftarrow ٠ \geq س(س - ١)$ $\Leftarrow س^٢ - س - ٢ \leq ٠$

جذرا المقدار $س = ٠$ أو $س = ١$ $\Leftarrow (س - ٢)(س + ١) \leq ٠$

أصفارا المقدار : $س = -١$ أو $س = ٢$

إشارة س



إشارة $(س - ١)$



إشارة $س(س - ١)$



إشارة $(س - ٢)$



إشارة $(س + ١)$



إشارة $(س - ٢)(س + ١)$



$\Leftarrow$ مجموعة الحل = $]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[$.(١) $\Leftarrow$ مجموعة الحل = $[-١ ، ٢]$ (٢)

شكل (٦ - ١٦)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة : $|س^٢ - س - ١| \geq ١ = (]-\infty ، ٠] \cup [١ ، \infty[) \cap [-١ ، ٢]$.

$=]-١ ، ٠] \cup [١ ، ٢]$.

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٦ - ٢٩) أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : ٢ < ٣ س − ٧ < ٨

الحـــل نفصل المتراجحة المزدوجة إلى متراجحتين غير مزدوجتين

٢ < ٣س − ٧	و	٣س − ٧ < ٨
٩ < ٣س		٣س < ١٥
٣ < س		س < ٥
مجموعة الحل =] ٣ ، ∞ [		مجموعة الحل =] − ∞ ، ٥ [.

∴ مجموعة حل المتراجحة هي :] − ∞ ، ٥ [∩] ٣ ، ∞ [=] ٣ ، ٥ [.

مثال (٦ - ٣٠) أوجد مجموعة الحل للمتراجحة : ٢ ≤ | ٢ س − ٣ | ≤ ٨ .

الحـــل ٢ ≤ | ٢ س − ٣ | ≤ ٨

إما ٢ < ٢ س − ٣ ≤ ٨	أو	٢ ≤ ٣ − ٢ س ≤ ٨
⇐ ٥ ≤ ٢ س ≤ ١١		⇐ −١ ≤ −٢ س ≤ ٥
⇐ $\frac{٥}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١١}{٢}$		⇐ $\frac{١}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{-٥}{٢}$.
⇐ مجموعة الحل = [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] (١)		⇐ مجموعة الحل = [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$] (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

مجموعة حل المتراجحة هي : [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] ∪ [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$] .

عند فصل المتراجحة المزدوجة إلى متراجحتين غير مزدوجتين تكون مجموعة حل المتراجحة المزدوجة هي تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين الفرديتين .

ولناخذ المثال السابق : ٢ ≤ | ٢ س − ٣ | ≤ ٨

⇐ ٢ ≤ | ٢ س − ٣ |		و | ٢ س − ٣ | ≤ ٨
⇐ ٢ ≤ ٢ س − ٣	أو ٢ س − ٣ ≤ −٢	⇐ −٨ ≤ ٢ س − ٣ ≤ ٨
⇐ ٥ ≤ ٢ س	⇐ ٢ س ≤ ١	⇐ −٥ ≤ ٢ س ≤ ١١
⇐ $\frac{٥}{٢}$ ≤ س	⇐ س ≤ $\frac{١}{٢}$	⇐ $\frac{-٥}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١١}{٢}$.
مجموعة الحل = [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [(١)	مجموعة الحل =] − ∞، $\frac{١}{٢}$] (٢)	مجموعة الحل للمتراجحة =

من(١)،(٢) نجد أن مجموعة حل المتراجحة =] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$] ∪ [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [(٣) [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] (٤)

من (٣)،(٤) نجد أن : ٢ ≤ | ٢ س − ٣ | ≤ ٨ = ( ] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$] ∪ [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [ ) ∩ [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$]

= [$\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$] ∪ [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$] .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٦ : ٧)

[١] أعد تعريف كل من المقادير التالية : أ) $|س - ٢|$. ب) $|س^{٢} - ٣س - ١٠|$.

جـ) $٢س - |س - ٥|$. د) $|س - \frac{١}{٢}|$. هـ) $|٢س - ٧|$.

[٢] أوجد مجموعة الحل لكل من المتراجحات التالية:

أ) $|\frac{٣س}{٢} - ٥| \leq ١٢$. ب) $|\frac{٣س}{٢} - ٥| \geq ١٢$.

جـ) $|س - ٣| \geq ٤$. د) $|س^{٢} - س - ٣| \geq ٣$.

هـ) $س^{٢} - |س| \leq ١٢$. و) $|س - ١| + |س| \leq ٣٢$.

[٣] لتكن $س \in [-١ ، ٢]$ أثبت أن:

أ) $١ \geq ٢س + ٣ \geq ٧$. ب) $\frac{٣}{٤} \geq \frac{٣}{س + ٢} \geq ٣$.

[٤] إذا كانت $ص = \frac{٣}{س + ٢}$ ، $٤ > س > ٠$ ، وكانت $أ > ص > ب$. أوجد قيمة كل من أ ، ب

٦ : ٨ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغير واحد

مثال (٦ - ٣١) أوجد مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين :

$٥س + ٧ \leq ٠$ ، $\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

الحل

$٥س + ٧ \leq ٠$

$\Leftarrow ٥س \leq -٧$

$\Leftarrow س \leq -\frac{٧}{٥}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= [-\infty ، -\frac{٧}{٥}]$ (١)

$\frac{٣ - س}{٥} > ٢س$.

$\Leftarrow ٣ - س - ١٠س > ٠$.

$\Leftarrow -١١س > -٣$.

$\Leftarrow س < \frac{٣}{١١}$.

$\therefore$ مجموعة الحل $=]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين $= [-\infty ، -\frac{٧}{٥}] \cap]-\infty ، \frac{٣}{١١}[$

$= [-\frac{٧}{٥} ، \frac{٣}{١١}[$.

مجموعة حل النظام (جملة المتراجحات) يساوى تقاطع مجموعات حل المتراجحات المكونة للنظام.

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٦ - ٣٢) أوجد مجموعة حل جملة المتراجحتين التاليتين جبرياً ، ومثّل ذلك بيانياً :

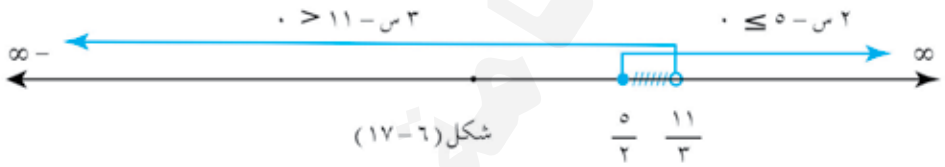
٢ س - ٥ ≤ ٠ ، ٣ س - ١١ > ٠ .

الحـــل

٢ س - ٥ ≤ ٠	٣ س - ١١ > ٠ .
⇐ ٢ س ≤ ٥	٣ س > ١١ .
⇐ س ≤ $\frac{٥}{٢}$	س > $\frac{١١}{٣}$.
∴ مجموعة الحل =] $\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [(١)	∴ مجموعة الحل =] - ∞ ، $\frac{١١}{٣}$ [(٢)

من (١) ، (٢) نجد أن مجموعة حل جملة المتراجحتين هي :

] $\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [∩] - ∞ ، $\frac{١١}{٣}$ [=] $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٣}$ [.



شكل (٦ - ١٧)

تمارين ومسائل (٦ : ٨)

أوجد مجموعة الحل لكل من جمل المتراجحات التالية:

أ) ٦ س + ١ > ٥ س ، ٩س - ٣ > ٧ س + ١ .

ب) س + ٣ < ٤ ، س - ٢ ≥ ٢ س + ٢ .

جـ) ٢ س + ٣ > س + ٤ ، س - ١٢ ≥ ٢ س .

د) $\frac{س - ٢}{٣}$ + س ≥ ٠ ، س + ٧ < ٠ .

http://E-learning-moe.edu.ye

٦ : ٩ متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين

تعرفت في الصف التاسع الأساسي على المعادلة الخطية: أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ . وتعلمت كيف تمثل هذه المعادلة بخط مستقيم في مستوى الإحداثيات ، وقد رمز للمستقيم بالرمز $\overleftrightarrow{ل}$.

المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$: أ س + ب ص + جـ = ٠ يقسم المستوى الإحداثي إلى نصفي مستوى مفتوحين يكون على أحدهما أ س + ب ص + جـ > ٠ ، ويكون على الآخر أ س + ب ص + جـ < ٠ .

تعريف (٦ : ٤)

متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين يمكن كتابتها بإحدى الصور التالية :

أ س + ب ص + جـ ≤ ٠ أو أ س + ب ص + جـ > ٠

أو أ س + ب ص + جـ ≥ ٠ أو أ س + ب ص + جـ < ٠ .

حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

ونسمي هذه الصور بالصور القياسية لمتراجحة الدرجة الأولى في متغيرين « طرفها الأيسر صفراً » .

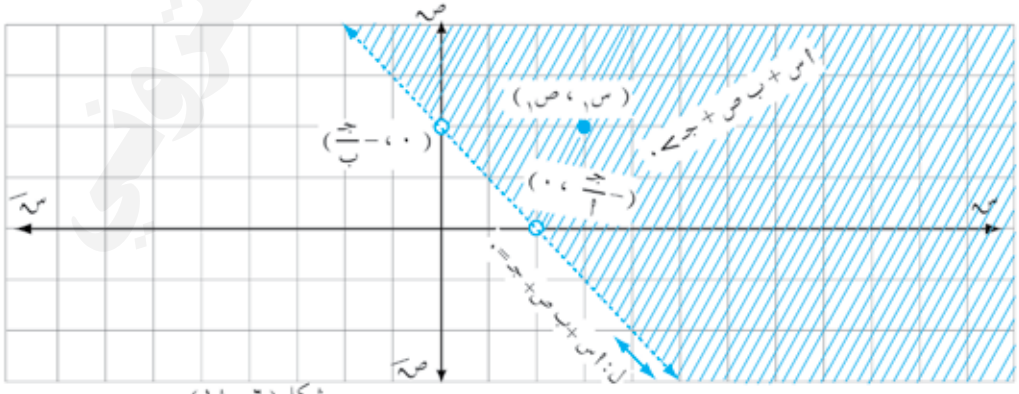
خطوات حل متراجحة الدرجة الأولى في متغيرين :

لحل المتراجحة : أ س + ب ص + جـ > ٠ نتبع الخطوات التالية :

١ – نرسم المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ بخط متقطع .

٢ – نختار نقطة (س١ ، ص١) من أحد نصفي المستويين الواقعين على جهتي المستقيم ل ونعوض بها في المتراجحة المعطاة ؛ فإذا كانت أ س١ + ب ص١ + جـ > ٠ تكون النقطة (س١ ، ص١) واقعة في نصف المستوى الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة : أ س + ب ص + جـ > ٠ ، ويسمى نصف مستوى مفتوحاً [لأن نقاط المستقيم ل لاتنتمي إليه] .

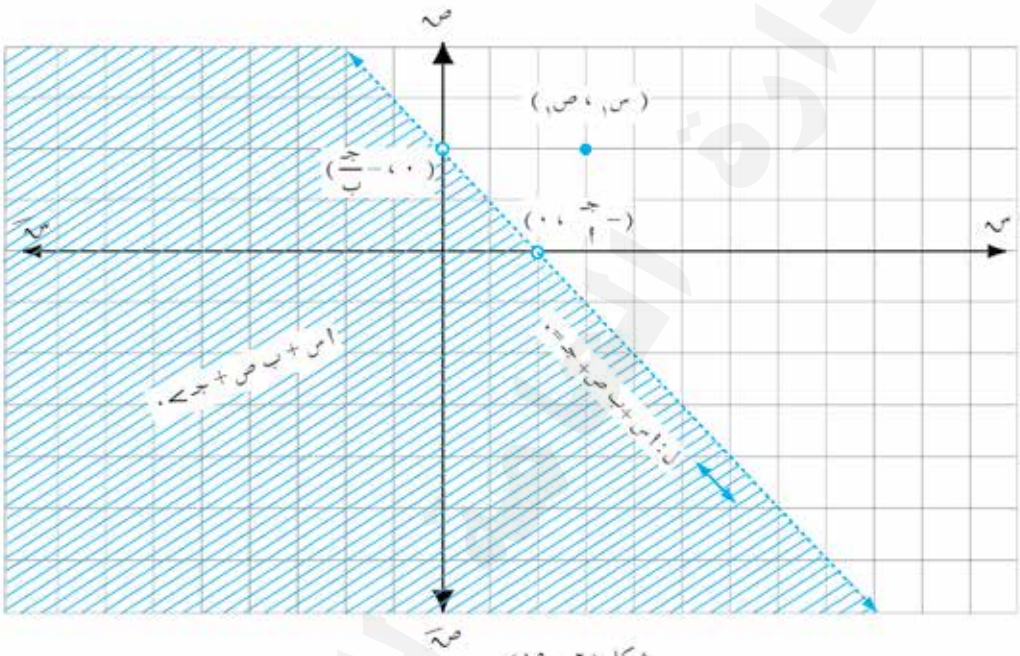
٣ – نظلل نصف المستوى المفتوح الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة أ س + ب ص + جـ > ٠ .



شكل (٦ – ١٨)

http://E-learning-moe.edu.ye

٤ – إذا كانت : أ س$_{١}$ + ب ص$_{١}$ + جـ < ٠ . أي أن النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) لم تحقق المتراجحة أ س + ب ص + جـ > ٠ فهذا يعني أن النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) واقعة في نصف المستوى الذي لايمثل مجموعة الحل للمتراجحة : أ س + ب ص + جـ > ٠ ، ويكون نصف المستوى الآخر هو الممثل لمجموعة حل المتراجحة : أ س + ب ص + جـ < ٠ فنقوم بتظليله .



شكل (٦ – ١٩)

عندما يكون المطلوب إيجاد مجموعة الحل لمتراجحة من الشكل : أ س + ب ص + جـ ≤ ٠ أو أ س + ب ص + جـ ≥ ٠ فاننا نرسم المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠ بخط متواصل وليس متقطع لأن المستقيم يعتبر جزء من مجموعة الحل ويكون نصف المستوى المغلق هو مجموعة الحل .

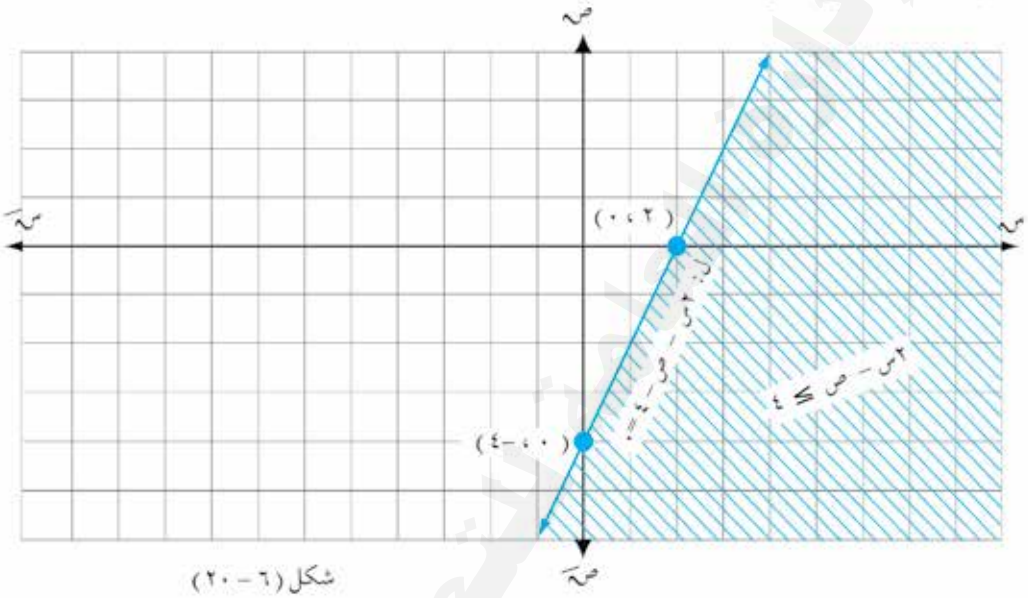
مثال (٦ – ٣٣) حل المتراجحة : ٢ س – ص ≤ ٤ .

الحل

٢ س – ص ≤ ٤ ⇔ ٢ س – ص – ٤ ≤ ٠ ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ ولرسم المستقيم نوجد نقطتي تقاطعه مع كل من المحور السيني والمحور الصادي . نضع س = ٠ فنجد أن ص = –٤ ⇐ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ل}$ مع المحور الصادات هي (٠ ، –٤) . نضع ص = ٠ فنجد أن س = ٢ ⇐ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ل}$ مع محور السينات هي (٢ ، ٠)

http://E-learning-moe.edu.ye

نصل النقطتين بمستقيم غير متقطع ونمده من طرفيه إلى ما لانهاية(باستخدام الأسهم) فيكون هو المستقيم المطلوب . $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س – ص – ٤ = ٠ .



شكل (٦ – ٢٠)

نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد أن : ٢ (٠) – (٠) ≤ ٤ ⇐ ٠ ≤ ٤ وهذا غير ممكن

⇐ (٠ ، ٠) لا تحقق المتراجحة : ٢ س – ص ≤ ٤

⇐ (٠ ، ٠) ∉ مجموعة حل المتراجحة : ٢ س – ص ≤ ٤

نظلل نصف المستوى المغلق الذي لايحتوي على النقطة (٠ ، ٠) .

الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ س – ص ≤ ٤ .

يفضل إختيار النقطة (٠ ، ٠) كنقطة اختبار للتحقق من نصف مستوى مجموعة الحل ، بشرط ألاّ تقع على $\overleftrightarrow{ل}$.

مثال (٦ – ٣٤) حل المتراجحة : ٢ س + ٥ ص > ٥ .

الحل

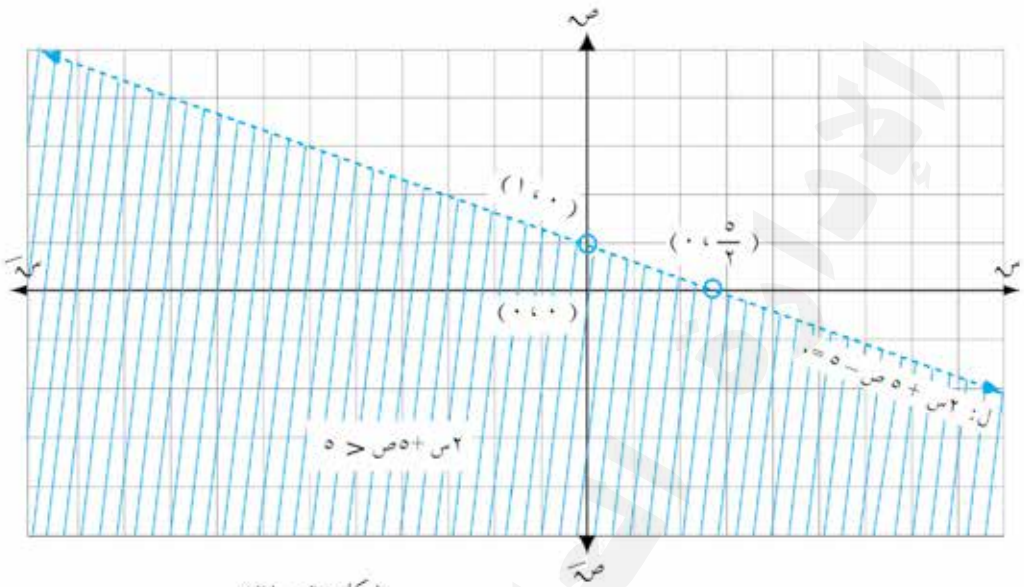
٢ س + ٥ ص > ٥ ⇔ ٢ س + ٥ ص – ٥ > ٠

$\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ٥ ص – ٥ = ٠ .

نرسم المستقيم ل بإيجاد نقاط تقاطعه مع المحورين كما في الجدول :

س	٠	$\frac{٥}{٢}$
ص	١	٠
(س،ص)	(٠ ، ١)	$(٠ ، \frac{٥}{٢})$

http://E-learning-moe.edu.ye



شكل (٦ - ٢١)

نختار النقطة (٠ ، ٠)

فنجد أن ٢ (٠) + ٥ (٠) < ٥ ⇐ (٠ ، ٠) ∈ نصف المستوى المفتوح (المظلل) .

∴ مجموعة الحل هي المنطقة المظللة .

تمارين ومسائل (٦ : ٩)

حل المتراجحات التالية :

١) س − ص < ٠ .

٢) ص < − س/٢ .

٣) س + ص ≥ ٦ .

٤) ص ≤ ٢ .

٥) س < ١ .

٦) ٢ س + ٥ ص < −٥ .

٧) ص − ٢ س < −٣ .

٨) ص ≥ ٠ .

٩) ٣/٢ س − ١١/٥ ص < ١ .

١٠) س ≤ ٠ .

http://E-learning-moe.edu.ye

٦ : ١٠ حل نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين

قد يكون نظام متراجحات الدرجة الأولى في متغيرين يتكون من أكثر من متراجحتين ، ولكننا سنكتفي بنظام المتراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين فقط .

لحل نظام متراجحتين من الدرجة الأولى في متغيرين نقوم بحل كل متراجحة على حده في نظام إحداثي واحد، وتكون منطقة تقاطع مجموعتي حل المتراجحتين هي مجموعة حل نظام المتراجحتين المعطاة.

مثال (٦- ٣٥) حل نظام المتراجحتين: ٢ س − ٢ ص + ٤ > ٠ ، ٢ ص + س − ٤ ≥ ٠ .

الحـل **أولاً** : نحل المتراجحة ٢ س − ٢ ص + ٤ > ٠

$\Leftarrow \overleftrightarrow{ل_١}$: ٢ س − ٢ ص + ٤ = ٠

$\Leftarrow$ س − ص + ٢ = ٠

نضع س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٢ ،

نضع ص = ٠ $\Leftarrow$ س = −٢ .

نحدد النقطتين (٠ ، ٢)، (−٢ ، ٠) ونصل بينهما بخط متقطع يمثل $\overleftrightarrow{ل_١}$: فنختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة ، وتقع على نصف المستوى المفتوح (مجموعة حل المتراجحة) فنظلله ،

ثانياً : نحل المتراجحة ٢ ص + س − ٤ ≥ ٠

$\Leftarrow \overleftrightarrow{ل_٢}$: ٢ ص + س − ٤ = ٠

عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٢

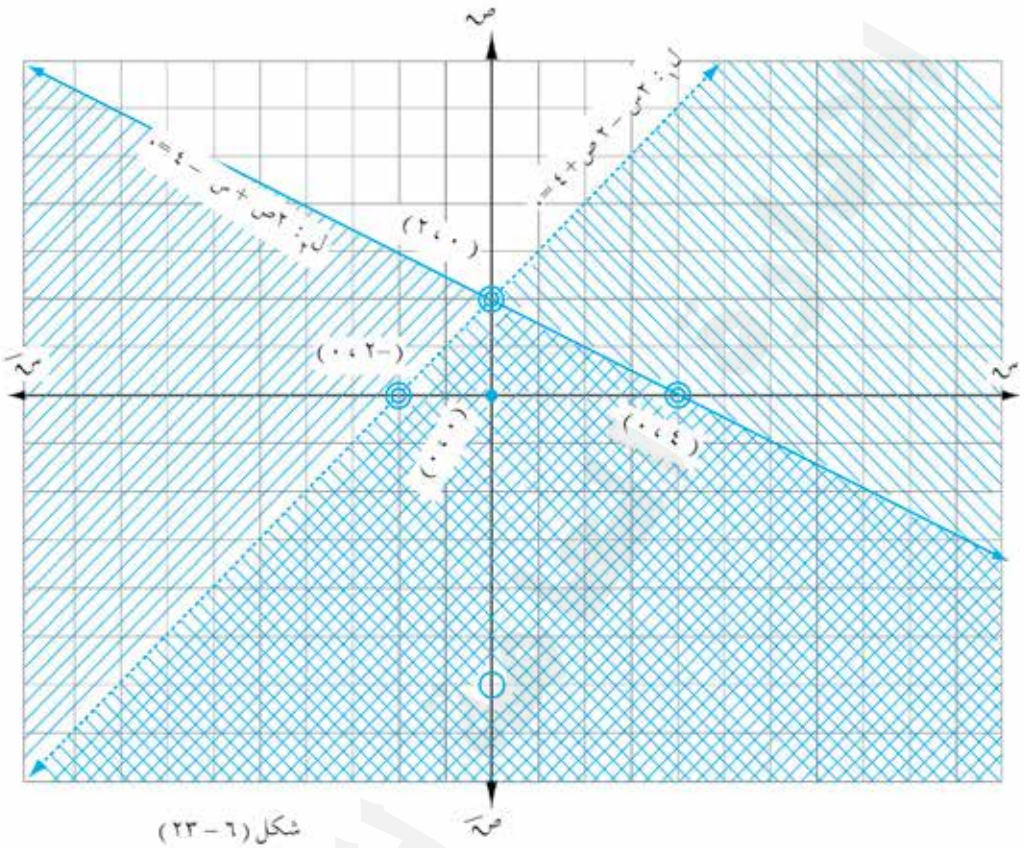
$\Leftarrow$ النقطة الأولى = (٠ ، ٢) ،

عندما ص = ٠ $\Leftarrow$ س = ٤

$\Leftarrow$ النقطة الثانية = (٤ ، ٠) .

بعد رسم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ نختار النقطة (٠ ، ٠) فنجد انها تحقق المتراجحة وتقع على نصف المستوى المغلق الذي يمثل مجموعة حل المتراجحة ٢ ص + س − ٤ ≥ ٠ ، فنظلله .

http://E-learning-moe.edu.ye



شكل (٦ – ٢٣)

فتكون المنطقة المشتركة في التظليل هي مجموعة حل جملة المتراجحتين .

نلاحظ أن الأجزاء المحيطة بمنطقة الحل من كل من $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ فنجد أن :

$\overleftrightarrow{ل_١}$ $\not\subset$ في مجموعة حل جملة المتراجحتين .

$\overleftrightarrow{ل_٢}$ $\subset$ في مجموعة حل جملة المتراجحتين .

تمارين ومسائل (٦ : ١٠)

حل جمل المتراجحات التالية :

١) $س + ٣ > ص$ ، $٢ س - ص > ٥$.

٢) $٥ س - ص + ٣ \geq ٠$ ، $س + ٣ ص > ١$.

٣) $س - ص > -٢$ ، $س \geq ٠$.

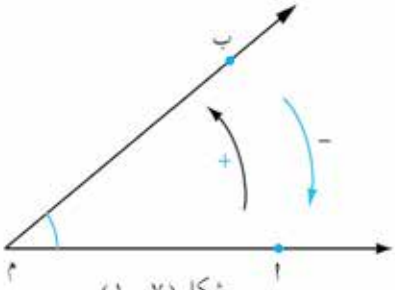
٤) $٢ س + ص > ٥$ ، $ص > -١$.

http://E-learning-moe.edu.ye

١ : ٧ الزاوية الموجَّهة

تذكر أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بدء مشتركة تسمى رأس الزاوية .

لاحظ الشكل (٧ – ١) تجد الشعاعين م أ ، م ب متقاطعين في مبدئهما المشترك (م) . والزاوية أ م ب المحددة بضلعها الابتدائي م أ وضلعها النهائي م ب ورأسها نقطة م . تسمى مثل هذه الزاوية زاوية موجَّهة ، ونكتب الزاوية الموجَّهة بإحدى الطريقتين : (م أ ، م ب) أو ∡ أ م ب .



شكل (٧ – ١)

والسهم في [الشكل (٧–١)] يشير إلى اتجاه الدوران سواء أكان مع حركة عقارب الساعة أم عكسها .

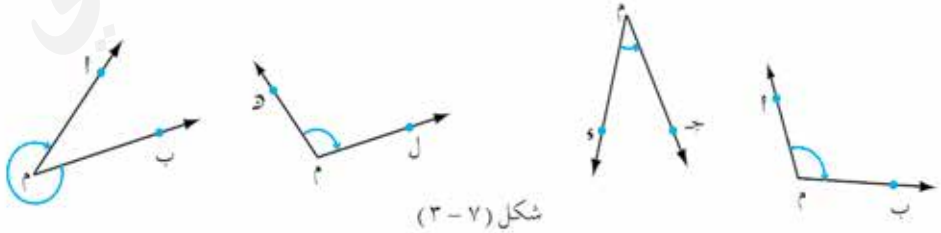
يكون قياس الزاوية الموجَّهة موجباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي عكس حركة عقارب الساعة ، ويكون قياس الزاوية الموجَّهة سالباً إذا كان اتجاه الدوران للضلع النهائي باتجاه حركة عقارب الساعة .

تلاحظ في [الشكل (٧ – ٢)] أن قياس كل من الزاويتين الموجَّهتين (١) ، (٢) موجباً بينما يكون قياس كل من الزاويتين الموجَّهتين (٣) ، (٤) سالباً .



شكل (٧ – ٢)

تدريب (٧–١) تأمل [الشكل (٧–٣)] تلاحظ أربع زوايا موجهة ، سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي لكل منها ، وعين نوع إشارة قياس كل زاوية.



شكل (٧ – ٣)

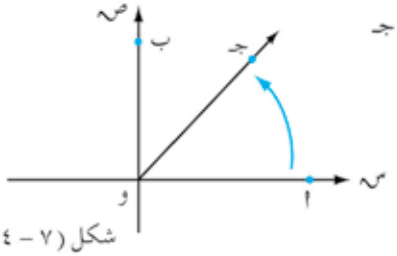
http://E-learning-moe.edu.ye

الوضع القياسي للزاوية الموجّهة :

تعريف (٧ : ١)

يقال أن زاوية موجّهة في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل ، وضلعها الابتدائي منطبقاً على محور السينات الموجب .

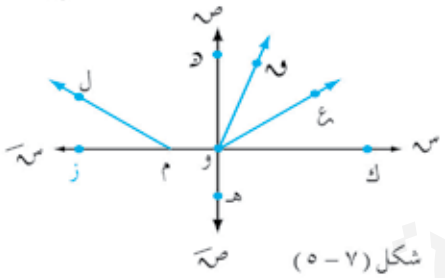
تأمل [الشكل (٧-٤)] تلاحظ أن : الزاوية الموجّهة ∡ أ و جـ في وضع قياسي بينما الزاوية الموجّهة ∡ ب و جـ ليست في وضع قياسي . لماذا ؟



شكل (٧ – ٤)

تدريب (٧-٢)

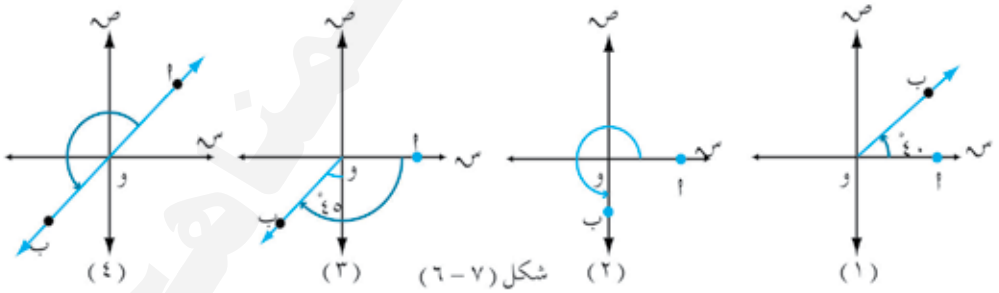
في الشكل (٧ – ٥) : سمِّ ثلاث زوايا في وضع قياسي ، وثلاث زوايا في وضع غير قياسي .



شكل (٧ – ٥)

مثال (٧ – ١)

في [الشكل(٧-٦)] : سمِّ كل زاوية وضلعها الابتدائي ، وضلعها النهائي ، وحدد قياسها ، ثم حدد ايّا من الزوايا الأربع في وضع قياسي .



شكل (٧ – ٦)

الحـــل

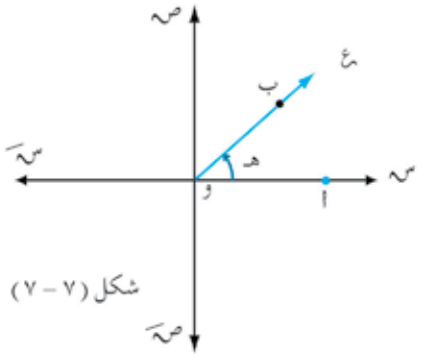
١) ∡ أ و ب زاوية موجهة، ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و أ}$ ، ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ ، قياسها ٤٠° ، وهي في وضع قياسي .

٢) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و أ}$ ،ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ ، قياسها ٢٧٠° ، وهي في وضع قياسي .

٣) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ،ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و أ}$ ،ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ ، قياسها –١٣٥° ، وهي في وضع قياسي .

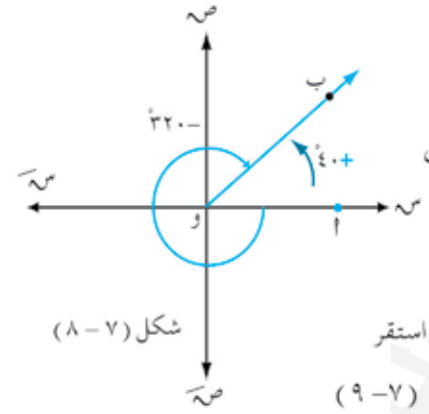
٤) ∡ أ و ب زاوية موجّهة ، ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و أ}$ ، ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ قياسها ١٨٠° ، وهي في وضع غير قياسي .

http://E-learning-moe.edu.ye



شكل (٧ – ٧)

لتحديد قياس الزاوية أ و ب الموضحة في الشكل (٧–٧) تصور شعاعا نقطة بدايته (و) ، وينطبق على محور السينات $\overleftarrow{\text{و أ}}$ وهو (الضلع الابتدائي) بدأ يدور باتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة حتى ينطبق على ضلعها الاخر $\overleftarrow{\text{و ب}}$ (الضلع النهائي) ، وقد قطع هـ من الدرجات ، عندئذ نقول أن : ق (∡ أ و ب) = هـ° .

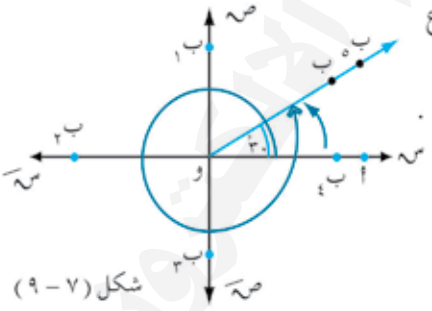


شكل (٧ – ٨)

في [الشكل (٧–٨)]: تلاحظ أن :

ق (∡ أ و ب) = ٤٠° (موجباً) بينما ق (∡ أ و ب) المنعكسة = – ٣٢٠° وهذا القياس (سالباً)، وهناك قياسات أخرى للزاوية أ و ب إذ نتصور أن الشعاع بدأ دورته بعكس حركة عقارب الساعة من الوضع $\overleftarrow{\text{و أ}}$ واتخذ الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، ثم استمر في الدوران ماراً بالمواضع $\overleftarrow{\text{و ب}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}_2}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}_3}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}_4}$ حتى استقر في الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}_5}$ وهو نفسه الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$. لاحظ الشكل (٧– ٩)

فيكون بذلك قد حدد القياسات للزاوية ٣٠° ، وماراً بالقياسات ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° ، وفي حالة الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}_4}$ نرى أن ق (∡ أ و $\overleftarrow{\text{ب}_4}$) = ٣٦٠° ، ونقول أن الشعاع قد دار دورة كاملة في حين لو استمر الشعاع بالدوران واتخذ الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}_5}$ منطبقاً على الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يكون بذلك قد حدد قياساً آخر للزاوية أ و ب بدلاً عن ٣٠° .



شكل (٧ – ٩)

أي أن : ق (∡ أ و ب) = ٣٦٠° + ٣٠° = ٣٩٠° .

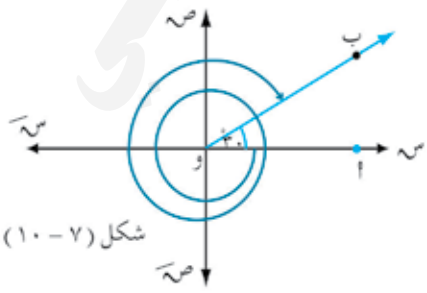
وإذا دار الشعاع دورتين كاملتين ثم اتخذ الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$ مرة ثالثة فإن :

ق (∡ أ و ب) = ٣٠° + ٢ × ٣٦٠° = ٧٥٠° .. وهكذا

إذا تصورنا أن الشعاع قد بدأ الدوران من الوضع $\overleftarrow{\text{و أ}}$ مع حركة دوران عقارب الساعة واتخذ $\overleftarrow{\text{و ب}}$

لاحظ الشكل (٧– ١٠) فيكون

ق (∡ أ و ب) المنعكسة = – ٣٣٠° .



شكل (٧ – ١٠)

وأما إذا دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ، ثم استمر حتى اتخذ الوضع $\overleftarrow{\text{و ب}}$ فإن

http://E-learning-moe.edu.ye

ق (∡ أ و ب) المنعكسة = −٣٣٠° − ١ × ٣٦٠° = −٦٩٠° ... وهكذا .

مما سبق نستنتج أن: لكل زاوية موجّهة في الوضع القياسي عدداً غير منتهٍ من القياسات .

وعلى العموم فإن :

ق (∡ أ و ب) = (هـ + د × ٣٦٠°) حيث د ∈ ص .

وإذا كانت د موجبة كان الدوران عكس دوران عقارب الساعة ، وإذا كانت د سالبة كان الدوران مع دوران عقارب الساعة ، ويسمى القياس هـ القياس الأساسي للزاوية سواء كان موجباً أو سالباً .

مثال (٧ − ٢) أوجد القياس الأساسي للزاوية ٨٤٠°

الحـــل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{٨٤٠°}{٣٦٠°}$ = ٢° (دورتين باتجاه عكس عقارب الساعة) ، والباقي = ١٢٠° وهو القياس الأساسي للزاوية .

أي أن هـ = ١٢٠°

ويمكن حسابها حسب القانون بعد معرفة عدد الدورات كما يلي :

٨٤٠° = هـ + د × ٣٦٠°

٨٤٠° = هـ + ٢ × ٣٦٠°

٨٤٠° = هـ + ٧٢٠°

∴ هـ = ٨٤٠° − ٧٢٠° = ١٢٠°

مثال (٧ − ٣) أوجد القياس الأساسي للزاوية (− ١٤٧٠°).

الحـــل

عدد الدورات الكاملة = $\frac{-١٤٧٠°}{٣٦٠°}$ = − ٤ (٤ دورات باتجاه حركة عقارب الساعة) ، والباقي = −٣٠°

وهو القياس الأساسي للزاوية

أي أن هـ = −٣٠°

(تحقق من الحل باستخدام القانون) .

http://E-learning-moe.edu.ye

أوضاع الزوايا القياسية في النظام الإحداثي :

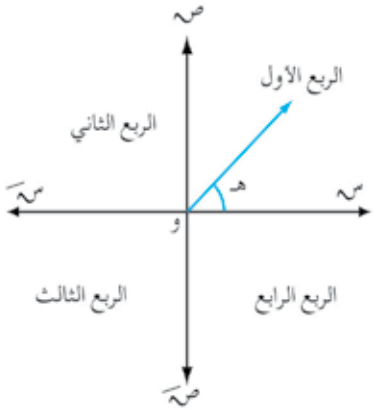
يوضح [الشكل (٧–١١)] الأرباع الأربعة لنظام إحداثي متعامد، لتكن لدينا زاوية في وضع قياسي قياسها هـ .

١ – إذا كانت الزاوية ٠° < هـ < ٩٠° فإنها تكون « زاوية حادة » وتقع في الربع الأول .

٢ – إذا كانت الزاوية ٩٠° < هـ < ١٨٠° فإنها تكون « زاوية منفرجة » وتقع في الربع الثاني .

٣ – إذا كانت الزاوية ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فإنها تكون « زاوية منعكسة » وتقع في الربع الثالث .

٤ – إذا كانت الزاوية ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠° فإنها تكون « زاوية منعكسة » وتقع في الربع الرابع .



شكل (٧ – ١١)

أما إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة في وضع قياسي على أحد محوري الإحداثيات تسمى بالزاوية المحورية .

مثلاً هـ = ٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات الموجب، هـ = ٩٠° زاوية محورية منطبقة على محور الصادات الموجب.

، هـ = ١٨٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات السالب، هـ = ٢٧٠° زاوية محورية منطبقة على محور الصادات السالب.

هـ = ٣٦٠° زاوية محورية منطبقة على محور السينات الموجب.

مثال (٧ – ٤) حدد في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا الموجّهة في الوضع القياسي ، ثم ارسم كل منها .

أ) ١٨٠° . ب) ٧٥° . جـ) ٢٥٠° . ء) ١٣٥° .

الحـل

أ) ∵ الزاوية = ١٨٠° فإن الضلع النهائي للزاوية يقع على محور السينات السالب زاوية محورية .

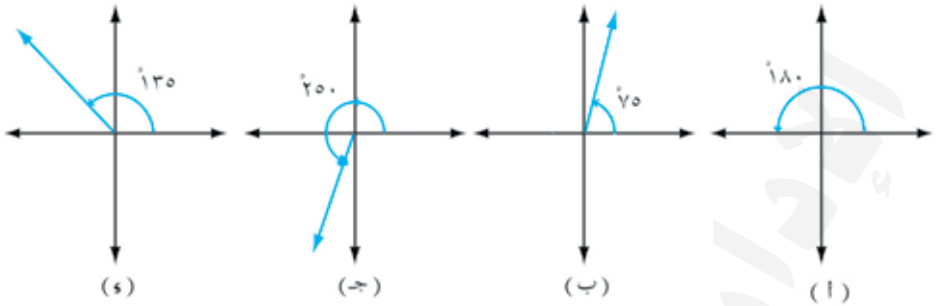
ب) ∵ الزاوية = ٧٥° ، ٠° < ٧٥° < ٩٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الأول .

جـ) ∵ الزاوية = ٢٥٠° ، ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° ، فإن الزاوية تقع في الربع الثالث .

ء) ∵ الزاوية = ١٣٥° ، ٩٠° < ١٣٥° < ١٨٠° فإن الزاوية تقع في الربع الثاني .

وبذلك يوضح الشكل (٧ –١٢) بالترتيب الوضع القياسي للزوايا الموجهة ١٨٠° ، ٧٥° ، ٢٥٠° ، ١٣٥° .

http://E-learning-moe.edu.ye



شكل (٧ – ١٢)

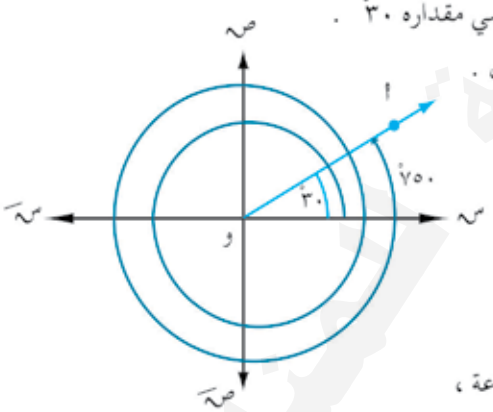
مثال (٧ – ٥) ارسم الزاويتين الموجهتين أ) ٧٥٠° . ب) –٤٩٥° . في الوضع القياسي مبينا، الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاويتين ، ثم أوجد القياس الأساسي لكل منها .

الحـــل

أ) عدد الدورات الكاملة = $\frac{٧٥٠^\circ}{٣٦٠^\circ}$ = ٢ (دورتين باتجاه عكس حركة عقارب الساعة) ، والباقي = ٣٠° .

∴ و$\overleftarrow{أ}$ دار دورتين حتى استقر على قياس أساسي مقداره ٣٠° .

∴ الزاوية ٧٥٠° موجبه ، وتقع في الربع الأول .



شكل (٧ – ١٣)

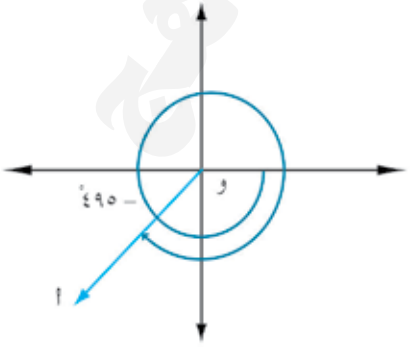
ب) عدد الدورات الكاملة = $\frac{-٤٩٥^\circ}{٣٦٠^\circ}$ = –١

(دورة واحدة باتجاه حركة عقارب الساعة)

والباقي = –١٣٥° .

∵ و$\overleftarrow{أ}$ دار دورة كاملة مع حركة عقارب الساعة ، حتى استقر على قياس أساسي مقداره –١٣٥° .

∴ الزاوية –٤٩٥° سالبة ، وتقع في الربع الثالث .



شكل (٧ – ١٤)

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٧ : ١)

[١] تحقق من صحة موقع الزوايا في وضعها القياسي باختيار الإجابة الصحيحة .

أ) الزاوية التي قياسها ٣٠٠° تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

ب) الزاوية التي قياسها ٢٥٠° تقع في الربع ... [الأول – الثاني – الثالث – الرابع].

[٢]أوجد القياس الأساسي لكل من الزوايا الموجّهة في وضعها القياسي مبيناً الربع الذي تقع فيه ، ثم ارسمها :

أ) ٤٥° . ب) –٣٠° . جـ) –٣٩٠° . د) ٨٥٠° .

هـ) ١٩٢٠° . و) –١١٢٥° . ز) ٢٩٨١° .

[٣] في أي ربع أو على أي محور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية في الوضع القياسي ؟

أ) ٣١٥° . ب) –٢٠٠° . جـ) –٥٦٠° . د) –٤٨٠° .

هـ) ٢٥٠° . و) –٨٥° . ز) ٢٦٠° . ح) ٠° .

[٤] في أي من الحالات الآتية تكون الزاوية الموجّهة ∢ س ص ع في وضع قياسي .

أ) س (٥ ، ٠) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، –٥) .

ب) س (٢ ، ٢) ، ص (٠ ، ٠) ، ع (٠ ، ٤) .

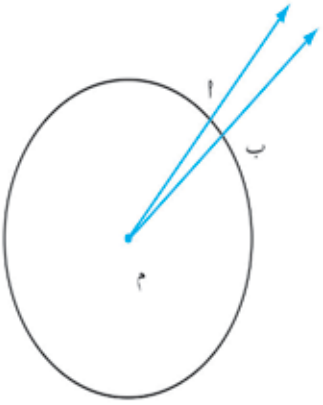
http://E-learning-moe.edu.ye

٧ : ٢ وحـدات قيـاس الزوايـا

هناك نظامان لقياس الزوايا يسمى الأول بالنظام (أو التقدير) الستيني ، ويسمى الآخر النظام (أو التقدير) الدائري .

أولاً – التقدير الستيني :

يلاحظ في الشكل (٧–١٥) دائرة مركزها « م » قسم محيطها إلى ٣٦٠ جزءً متساوياً ، والشعاعان $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ يحددان ضلعي ∡ أ م ب بحيث يحصران قوساً طوله يساوى $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة لتشكل الزاوية الناتجة عن هذا التقسيم وحدة قياس للنظام الستيني بدرجة ستينية واحدة يرمز لها بالرمز (١°) .



شكل (٧ – ١٥)

تعريف (٧ : ٢)

الدرجة الستينية هي قياس الزاوية المركزية التي يحصر ضلعاها قوساً طوله $\frac{١}{٣٦٠}$ ، ويرمز لها بالرمز (١°)

نقسم الدرجة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى دقيقة يرمز لها بالرمز (١َ) ، وبتقسيم الدقيقة إلى (٦٠) وحدة متساوية القياس كل منها تسمى ثانية ويرمز لها بالرمز (١ً) .

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، أي أن : ١° = ٦٠َ

الدقيقة = ٦٠ ثانية ، أي أن : ١َ = ٦٠ً

ثانياً – التقدير الدائري:

إلى جانب التقدير الستيني لقياس الزوايا يوجد قياس آخر للأقواس والزوايا يسمى بالتقدير الدائري ووحدته هي الراديان .

تعريف (٧ : ٣)

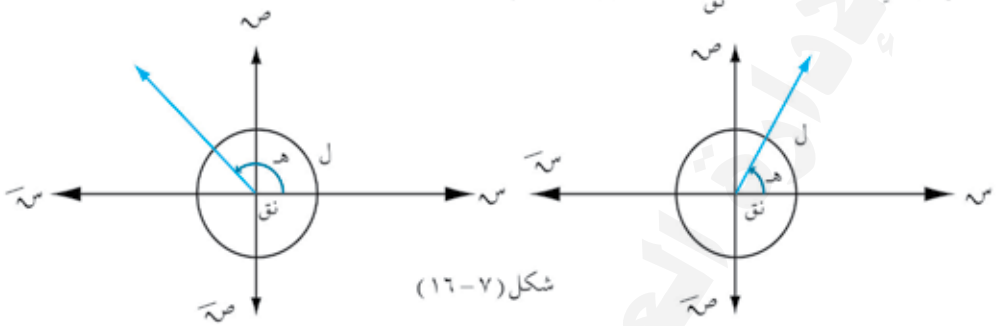
الراديان (الزاوية النصف قطرية) : هو قياس زاوية مركزية تقابل قوساً من دائرة طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة ، ويرمز له بالرمز « ر » .

بمعنى أن الزاوية التي قياسها (واحد راديان) تقابل قوساً طوله (نق) .

والزاوية التي قياسها (٢ راديان) تقابل قوساً طوله (٢ نق) ، وبصورة عامة فإن الزاوية التي قياسها هـ ر تقابل قوساً طوله (هـ نق) وحدة طول ، ونستنتج أن طول القوس (ل) المقابل لزاوية مركزية قياسها (هـ ر) = هـ × نق ، وتكتب بالصورة : ل = هـ × نق .

http://E-learning-moe.edu.ye

وعليه فإن : هـ = $\frac{ل}{نق}$ ، نق ≠ صفر .



شكل (٧ – ١٦)

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري :

تعرف أن محيط الدائرة يساوي ٢ π نق ، وأن القياس الدائري للزاوية الناتجة عن دورة كاملة بالاتجاه الموجب تساوى $\frac{٢\pi نق}{نق}$ = ٢ π ر ، وهذه الزاوية تساوي ٣٦٠° في التقدير الستيني .

∴ ٢ π ر = ٣٦٠° أو π ر = ١٨٠° .

ولذلك فإن :

١° = $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ ، ١ ر = $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$.

قاعدة :

١ – عند التحويل من الدرجات إلى راديان تضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$.
٢ – عند التحويل من الراديان إلى درجات تضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$.

فعلى سبيل المثال :

التقدير الستيني	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
التقدير الدائري	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢ π

الجدول (٧ – ١)

مثال (٧ – ٦) أكمل الجدول (٧ – ٢) التالي :

التقدير الستيني	١٢٠°	– ١٥٠°			
التقدير الدائري			$\frac{٣\pi}{٢}$		$\frac{-\pi}{٩}$

الجدول (٧ – ٢)

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

- لتحويل ١٢٠° إلى الراديان نضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

$$١٢٠^\circ = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ١٢٠^\circ = \frac{٢}{٣}\pi \text{ ، }$$

- لتحويل −١٥٠° إلى الراديان .

$$(-١٥٠^\circ = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times -١٥٠^\circ = -\frac{٥\pi}{٦})$$

- لتحويل $\frac{٣}{٢}\pi$ إلى الدرجات نضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

$$\therefore \frac{٣\pi}{٢} = \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \times \frac{٣\pi}{٢} = ٢٧٠^\circ$$

- لتحويل $-\frac{\pi}{٩}$ إلى الدرجات :

$$(-\frac{\pi}{٩} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = -٢٠^\circ) .$$

مثال (٧ − ٧) أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° في دائرة طول نصف قطرها ١٢سم . ($\pi \approx ٣,١٤$) .

الحـــل

$$٦٠^\circ = \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣} .$$

$$ل = ن ق \times هـ = ١٢ \times \frac{\pi}{٣} \approx ٤ \times ٣,١٤ \approx ١٢,٥٦ \text{سم} .$$

تمارين ومسائل (٧ : ٢)

[١] حوّل إلى الراديان كلاً مما يلي :

أ) ٣٦٠° . ب) ٩٠° . جـ) ٤٥° . د) ١٥° .

هـ) −١٢٠° . و) ٣٠٠° . ز) −٥٤٠° . ح) ٠° .

ط) −٢٥٥°

[٢] حوّل إلى الدرجات كلاً مما يلي :

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ر . ب) $-\frac{\pi}{٤}$ ر . جـ) $\frac{٥\pi}{٦}$ ر . د) ٢,٦ ر .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٣] أكمل الجدول (٧ – ٣) التالي :

الزاوية بالتقدير الستيني	١٥٠°	٢٢٥°				٣٦٠°
الزاوية بالتقدير الدائري			$\frac{\pi ٤}{٣}$ ر	$\frac{\pi ٧}{٤}$ ر	$\frac{\pi ١١}{٦}$ ر	

الجدول (٧ – ٣)

[٤] دائرة طول نصف قطرها يساوي ٢٠سم ، أوجد طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية قياسها هـ ، حيث :

أ) هـ = $\frac{\pi ٣}{٤}$. ب) هـ = $\frac{\pi ٥}{٤}$. جـ) هـ = ١٤٠° . د) هـ = ٦٠° .

٧ : ٣ النسب المثلثية

سابقاً تعرفت على النسب المثلثية التالية :

جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا جـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

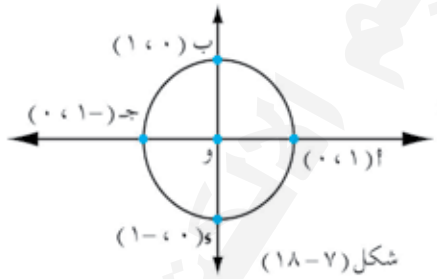
كما هو موضح في [الشكل (٧–١٧)] .



شكل (٧ – ١٧)

والآن يمكن أن نتعرف على النسب المثلثية التالية الأساسية (جا ، جتا ، ظا) من خلال دائرة الوحدة .

لاحظ [الشكل (٧– ١٨)] إذا رسمنا دائرة نصف قطرها وحدة واحدة مركزها نقطة الأصل (و) في المستوى الديكارتي المتعامد الإحداثيات، في هذه الحالة تسمى الدائرة بدائرة الوحدة حيث تقطع محور السينات في النقطتين أ (١ ، ٠) ، جـ (–١ ، ٠) ، وتقطع محور الصادات في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، –١) ، وفي ضوء ذلك نعرف دائرة الوحدة .



شكل (٧ – ١٨)

تعريف (٧ : ٤)

دائرة الوحدة : هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و) في نظام إحداثي متعامد وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال . أي | و أ | = ١ وحدة طول

إذا رسمنا في دائرة الوحدة في [الشكل (٧–١٩)] زاوية موجّهة مثل الزاوية هـ في الوضع القياسي حيث يقطع ضلعها الابتدائي الدائرة في النقطة أ (١ ، ٠) ويقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة ب (س ، ص) .

http://E-learning-moe.edu.ye

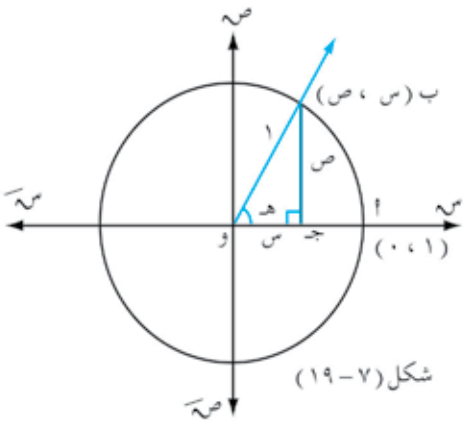
من الشكل (٧ – ١٩) Δ ب جـ و قائم الزاوية في جـ وبحسب نظرية فيثاغورث :

$|\text{و جـ}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} = |\text{و ب}|^{٢}$ ،

ولكن $|\text{و ب}| = \text{نق} = ١$.

$\therefore |\text{و جـ}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} = ١$ ،

$\therefore \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$ ـــــ (١)



شكل (٧ – ١٩)

ونعرف النسب المثلثية الأساسية لهذه الزاوية كالآتي :

تعريف (٧ : ٥)

إذا كانت ب (س ، ص) هي النقطة لزاوية قياسها هـ في دائرة الوحدة فإن :

١ – الإحداثي الصادي للنقطة ب يسمى جيب الزاوية ، ويكتب : جا هـ = ص

٢ – الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى جيب تمام الزاوية ، ويكتب : جتا هـ = س .

٣ – ناتج قسمة الإحداثي الصادي على الإحداثي السيني للنقطة ب يسمى ظل الزاوية ويكتب :

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} .$$

وبالتعويض عن س = جتا هـ ، ص = جا هـ في العلاقة (١) نحصل على :

$\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{جا}^{٢}\text{هـ} = ١$ ـــــ (٢) .

بالإضافة إلى النسب المثلثية الأساسية فإننا نعرف نسباً مثلثية أخرى للزاوية التي قياسها هـ على النحو التالي :

تعريف (٧ : ٦)

١– قاطع تمام الراوية : $\text{قتا هـ} = \frac{١}{\text{جا هـ}}$ ، جا هـ ≠ ٠ .

٢– قاطع الزاوية : $\text{قا هـ} = \frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ، جتا هـ ≠ ٠ .

٣– ظل تمام الزاوية : $\text{ظتا هـ} = \frac{١}{\text{ظا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ، جا هـ ≠ ٠ .

وفي دائرة الوحدة نجد أن : $\text{قتا هـ} = \frac{١}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠ .

$\text{قا هـ} = \frac{١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ .

$\text{ظتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠ .

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧-٨) إذا كان جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ أوجد كلاً من ظا هـ ، قتا هـ ، قا هـ ، ظتا هـ .

الحل

∵ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ ظا هـ = $\frac{\frac{٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}}$ = $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{١٣}{١٢}$ = $\frac{٥}{١٢}$ ،

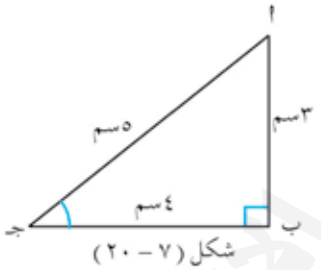
∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ ∴ قتا هـ = $\frac{١}{\frac{٥}{١٣}}$ = $\frac{١٣}{٥}$ ،

∵ قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ∴ قا هـ = $\frac{١}{\frac{١٢}{١٣}}$ = $\frac{١٣}{١٢}$ ،

∵ ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ∴ ظتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ÷ $\frac{٥}{١٣}$ = $\frac{١٢}{١٣}$ × $\frac{١٣}{٥}$ = $\frac{١٢}{٥}$

مثال (٧-٩) إذا كان جا جـ = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠° < جـ < ٩٠° ، فأوجد قيمة جتا٢ جـ − جا٢ جـ .

الحل



شكل (٧ - ٢٠)

نستخدم نظرية فيثاغورث

| أ ب |٢ + | ب جـ |٢ = | أ جـ |٢ .

(٣)٢ + | ب جـ |٢ = (٥)٢ ⇐ | ب جـ |٢ = ٢٥ − ٩ = ١٦

∴ | ب جـ | = $\sqrt{١٦}$ = ٤ ، ∴ جتا جـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا٢ جـ − جا٢ جـ = $(\frac{٤}{٥})^{٢}$ − $(\frac{٣}{٥})^{٢}$.

= $\frac{١٦}{٢٥}$ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$.

حل آخر :

جا٢ جـ + جتا٢ جـ = ١ ∴ جتا٢ جـ = ١ − جا٢ جـ

= ١ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

∴ جتا٢ جـ − جا٢ جـ = $\frac{١٦}{٢٥}$ − $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

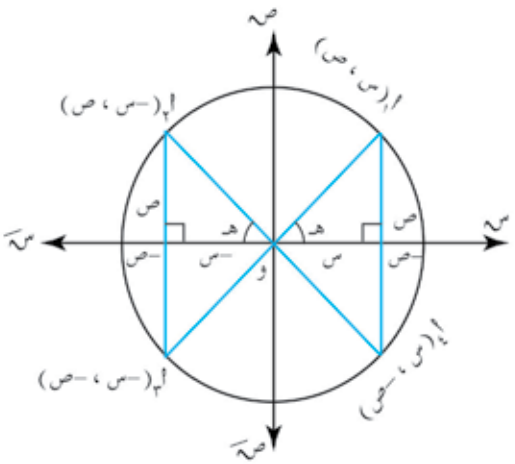
http://E-learning-moe.edu.ye

قاعدة الإشارات للنسب المثلثية :

إذا كانت جاهـ = ص ، جتا هـ = س ،

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ (حيث س ≠ ٠)

لاحظ [الشكل (٧-٢١)] حيث أ(س ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية هـ مع دائرة الوحدة ، لذلك فإشارة كل من جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، ظتاهـ تتبع إشارة كل من س ، ص .

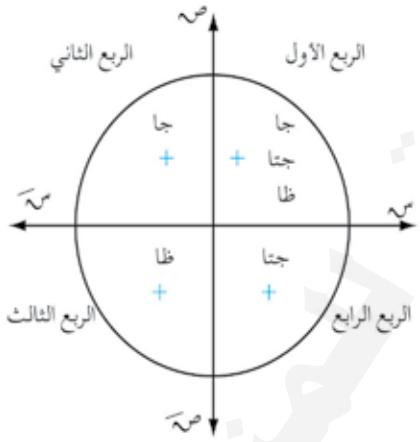


شكل (٧-٢١)

أدرس الجدول (٧ - ٤) مستخدماً [الشكل (٧-٢٢)] :

الربع	الفترة بالدرجات	قيم س ، ص	إشارة النسب المثلثية للزاوية هـ
الأول	[٠° ، ٩٠°]	س موجبة ، ص موجبة	(جا ، جتا ، ظا) موجبة
الثاني	] ٩٠° ، ١٨٠° [	س سالبة ، ص موجبة	جا موجبة ، (جتا ، ظا) سالبة
الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [	س سالبة ، ص سالبة	(جا ، جتا) سالبة، ظا موجبة
الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [	س موجبة ، ص سالبة	(جا، ظا) سالبة ،جتا موجبة

الجدول (٧ - ٤)



شكل (٧-٢٢)

تدريب (٧-٣) أكمل الجدول (٧ - ٥) التالي :

قياس الزاوية الموجهة	الربع الذي تقع فيه	إشارة		
		جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
٤٥°				
١١٠°				
٣٠٠°				
٢١٠°				
٧٥٠°				

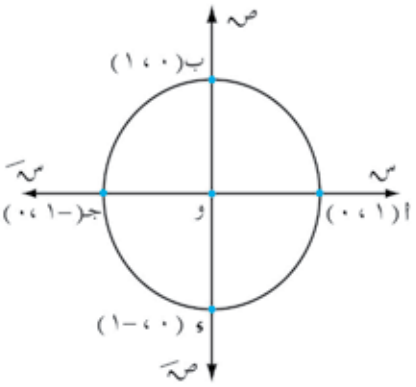
الجدول (٧ - ٥)

http://E-learning-moe.edu.ye

النسب المثلثية لبعض الزوايا المحورية :

تعلمت سابقاً إيجاد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة مثل : ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° ، ونتعرف الآن على بعض النسب المثلثية للزوايا ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° باستخدام دائرة الوحدة .

نرسم دائرة الوحدة في النظام الإحداثي المتعامد [الشكل (٧-٢٣)] .



شكل (٧-٢٣)

نلاحظ أن دائرة الوحدة تقطع المحور السيني في النقطتين أ(١ ، ٠) ، جـ(-١ ، ٠) ، وتقطع المحور الصادي في النقطتين ب (٠ ، ١) ، ء (٠ ، -١) ، ومن خلال ذلك نستطيع تحديد بعض النسب المثلثية للزوايا : ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° باستخدام دائرة الوحدة .

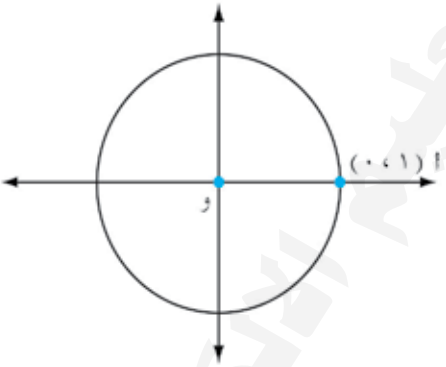
١ - انظر [الشكل (٧-٢٤)] أ هي النقطة (١ ، ٠) ،

∴ ق (∢ أ و أ) = ٠°

∴ جا ٠° = ٠

جتا ٠° = ١

ظا ٠° = ٠ .



شكل (٧-٢٤)

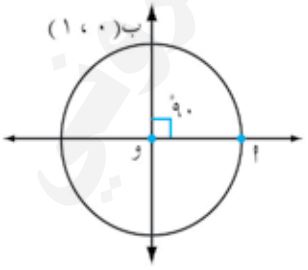
٢ - انظر [الشكل (٧-٢٥)] ب هي النقطة (٠ ، ١) ،

∴ ق (∢ أ و ب) = ٩٠° .

∴ جا ٩٠° = ١

جتا ٩٠° = ٠

ظا ٩٠° = غير معرّف (لماذا ؟)



شكل (٧-٢٥)

http://E-learning-moe.edu.ye

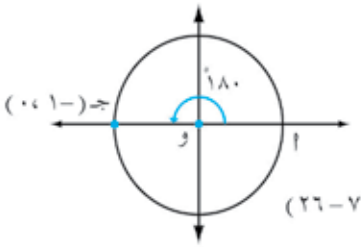
٣ – انظر [الشكل (٧–٢٦)] جـ هي النقطة (–١ ، ٠) ،

ق (∡ أ و جـ) = ١٨٠°

∴ جا ١٨٠° = ٠

جتا ١٨٠° = –١

ظا ١٨٠° = ٠



شكل (٧ – ٢٦)

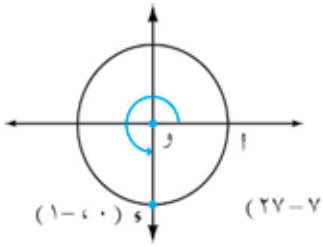
٤ – انظر [الشكل (٧–٢٧)] د هي النقطة (٠ ، –١)،

ق (∡ أ و ء) المنعكسة = ٢٧٠°

∴ جا ٢٧٠° = –١

جتا ٢٧٠° = ٠

ظا ٢٧٠° = غير معرّف (لماذا ؟) .



شكل (٧ – ٢٧)

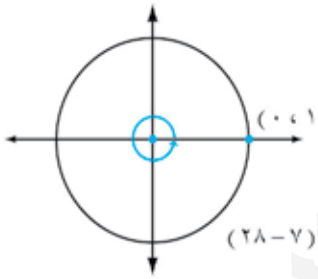
٥ – انظر [الشكل (٧–٢٨)] أ هي النقطة (١ ، ٠) .

ق (∡ أ و أ) = ٣٦٠°

∴ جا ٣٦٠° = ٠

جتا ٣٦٠° = ١

ظا ٣٦٠° = ٠



شكل (٧ – ٢٨)

تدريب (٧–٤) قارن النسب المثلثية للزاويتين اللتين قياس كل منهما ٠° ، ٣٦٠° . ماذا تستنتج ؟

يلخص الجدول (٧ – ٤) النسب المثلثية للزوايا الخاصة السابقة الذكر كالتالي :

النسب المثلثية الزاوية	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ	قا هـ	قتا هـ	ظتا هـ
٠°	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة
٩٠°	١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	١	٠
١٨٠°	٠	–١	٠	–١	غير معرّفة	غير معرّفة
٢٧٠°	–١	٠	غير معرّفة	غير معرّفة	–١	٠
٣٦٠°	٠	١	٠	١	غير معرّفة	غير معرّفة

الجدول (٧ – ٤)

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ - ١٠) إذا كانت (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجّهة قياسها هـ مع دائرة الوحدة فأوجد جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، حيث $^{\circ}$ ٠ < هـ < ٩٠$^{\circ}$

الحـــل

∵ (س ، $\frac{٣}{٥}$) نقطة على دائرة الوحدة . ∴ فهي تحقق معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١

وبالتعويض عن قيمة ص يكون : س^{٢} + ($\frac{٣}{٥}$)^{٢} = ١ ، ومنها س^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$.

∴ س = ± $\frac{٤}{٥}$ ، ∵ $^{\circ}$ ٠ < هـ < ٩٠$^{\circ}$

∴ الزاوية هـ واقعة في الربع الأول ، س ، ص موجبتان ، ومنه تكون : جا هـ = ص = $\frac{٣}{٥}$ ،

جتا هـ = س = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$.

مثال (٧ - ١١) لتكن د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجّهة هـ$_{١}$ مع دائرة الوحدة . أثبت أنه توجد قيمتان لـ ص ، وبين الزاويتين على دائرة الوحدة، (حيث ٠ < هـ < ٢ π) ، ثم أوجد النسب المثلثية الست لكل من الزاويتين :

الحـــل

∵ د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، ص) تقع على دائرة الوحدة فهي

تحقق معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١ فيكون :

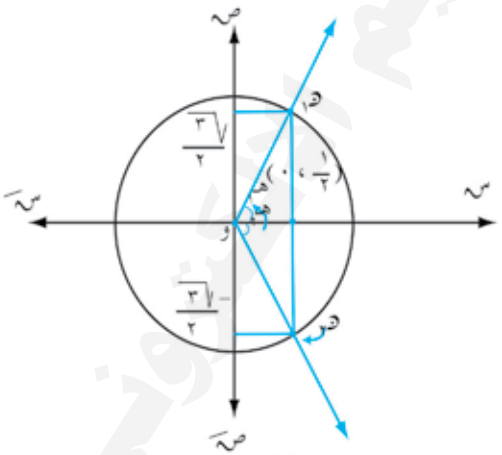
($\frac{١}{٢}$)^{٢} + ص^{٢} = ١ ، ومنها ص^{٢} = $\frac{٣}{٤}$

، ∴ ص = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ يوجد نقطتان على دائرة الوحدة هما :

د$_{١}$ ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) ، د$_{٢}$ ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) انظر [الشكل (٧-٢٩)]

∴ يوجد قياسان للزاوية هما : هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ حيث هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ ∈] ٠ ، ٢ π [



شكل (٧ - ٢٩)

http://E-learning-moe.edu.ye

فيكون جاهـ$_1$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا هـ$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، ظاهـ$_1$ = $\sqrt{3}$ (لماذا ؟)

∴ قتاهـ$_1$ = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، قاهـ$_1$ = ٢ ، ظتاهـ$_1$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .... (لماذا ؟)

جاهـ$_2$ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، جتاهـ$_2$ = $\frac{1}{2}$ ، ظاهـ$_2$ = $-\sqrt{3}$.

قتاهـ$_2$ = $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ ، قاهـ$_2$ = ٢ ، ظتاهـ$_2$ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ... (لماذا ؟)

مثال (٧-١٢) إذا كان جتاهـ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، أوجد قيمة كل من جاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، قتاهـ ، ظتاهـ حيث أن ٩٠° < هـ < ١٨٠°

الحـــل

∵ جتا^2 هـ + جا^2 هـ = ١ ، جتاهـ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

∴ $(\frac{-\sqrt{3}}{2})^2$ + جا^2 هـ = ١ ⇐ جا^2 هـ + $\frac{3}{4}$ = ١

∴ جا^2 هـ = $\frac{1}{4}$ ⇐ جاهـ = ± $\frac{1}{2}$.

بما أن الجيب في الربع الثاني موجب .

∴ جاهـ = $\frac{1}{2}$ ⇐ قتا هـ = $\frac{2}{1}$ = ٢

وعليه ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{1}{2}$ ÷ $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ∴ ظتاهـ = $-\sqrt{3}$ ،

قاهـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{-2}{\sqrt{3}}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٣)

[١] إذا كان جاهـ = $\frac{3}{5}$ ، ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، فأوجد : جتاهـ ، ظاهـ ، قاهـ ، ظتاهـ .

[٢] إذا كانت جاهـ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ر < هـ < ٢ π ر ، فاحسب كلاً من جتا هـ ، ظاهـ ، ظتاهـ.

[٣] إذا كانت جتا هـ = $\frac{-2}{3}$ ، وكانت هـ في الربع الثاني . أوجد قيمة كلٍّ من جا هـ ، ظاهـ ، ظتاهـ.

http://E-learning-moe.edu.ye

[٤] أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ٣٠° + جتا ٦٠° + ظا ٤٥°　　ب) ظا٢ ٦٠° + ٤ جتا٢ ٤٥° + ٣ قتا٢ ٣٠°

جـ) ٢ جا ٤٥° + $\frac{١}{٢}$ قتا ٤٥°

[٥] إذا كان جتا س = $\frac{\text{جا } ٦٠^\circ}{\text{جا } ٩٠^\circ} - \frac{\text{جا } ٠^\circ}{\text{جا } ٤٥^\circ}$ فما قيمة س بفرض أنها زاوية حادة موجبة ؟

[٦] إذا كانت (س ، $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة هـ مع دائرة الوحدة. فأوجد

جاهـ، جتاهـ، ظاهـ ، علماً بأن ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° .

[٧] إذا كانت ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ص) نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة هـ مع دائرة الوحدة

حيث ١٨٠° <هـ < ٢٧٠° ، فأوجد جاهـ، ظاهـ، قتاهـ ، قاهـ .

[٨] أثبت أن النقطة ن ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$) تقع على دائرة الوحدة ، وإذا مر بالنقطة ن الضلع النهائي لزاوية موجّهة في وضع قياسي وكان قياسها ع . فأوجد قيمة جا ع ، جتا ع ، ظا ع .

٧ : ٤ العلاقات بين النسب المثلثية

تعرفنا سابقا على دائرة الوحدة وعلى العلاقة فيها س٢ + ص٢ = ١ ، ولاحظنا أن س = جتا هـ ، ص = جا هـ ، وبالتعويض في المعادلة السابقة عن قيمة س ، ص نحصل على :

$$\text{جتا}^٢ \text{هـ} + \text{جا}^٢ \text{هـ} = ١ \quad \text{——— (١)}$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جتا٢ هـ نجد أن : $\frac{\text{جتا}^٢ \text{هـ}}{\text{جتا}^٢ \text{هـ}} + \frac{\text{جا}^٢ \text{هـ}}{\text{جتا}^٢ \text{هـ}} = \frac{١}{\text{جتا}^٢ \text{هـ}}$.

ومنه $١ + \text{ظا}^٢ \text{هـ} = \text{قا}^٢ \text{هـ}$ ——— (٢)

وبقسمة طرفي المعادلة (١) على جا٢ هـ نجد أن :

$$\frac{\text{جتا}^٢ \text{هـ}}{\text{جا}^٢ \text{هـ}} + \frac{\text{جا}^٢ \text{هـ}}{\text{جا}^٢ \text{هـ}} = \frac{١}{\text{جا}^٢ \text{هـ}} \quad .$$

ومنه $\text{ظتا}^٢ \text{هـ} + ١ = \text{قتا}^٢ \text{هـ}$ ——— (٣)

ويمكن استخدام العلاقات المثلثية السابقة في إثبات صحة علاقات مثلثية أخرى .

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ - ١٣) إذا كان قياس زاوية موجّهة تقع في الربع الرابع يساوي هـ ، وكان جتا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من : جا هـ ، قتا هـ ، ظا هـ .

الحـــل

∵ جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١ ∴ جا^{٢} هـ = ١ – جتا^{٢} هـ .

جا^{٢} هـ = ١ – $(\frac{١٢}{١٣})^{٢}$ = ١ – $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$.

∴ جا هـ = ± $\frac{٥}{١٣}$ ، ∵ الزاوية هـ تقع في الربع الرابع .

∴ جا هـ = – $\frac{٥}{١٣}$ ، ∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$.

∴ قتا هـ = $\frac{١}{\frac{-٥}{١٣}}$ = $\frac{-١٣}{٥}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\frac{-٥}{١٣}}{\frac{١٢}{١٣}}$ = $\frac{-٥}{١٣} \times \frac{١٣}{١٢}$ = $\frac{-٥}{١٢}$.

مثال (٧ - ١٤) إذا كان ظا هـ = ٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° ، فأوجد كلاً من جتا هـ ، جا هـ ، قتا هـ .

الحـــل ∵ ١ + ظا^{٢} هـ = قا^{٢} هـ .

∴ ١ + $(٢)^{٢}$ = قا^{٢} هـ ⇐ ٥ = قا^{٢} هـ ⇐ قا هـ = ± $\sqrt{٥}$

، حيث أن ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فالزاوية تقع في الربع الثالث .

∴ قا هـ = – $\sqrt{٥}$

، ∵ قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ⇐ – $\sqrt{٥}$ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ⇐ – $\sqrt{٥}$ × جتا هـ = ١

∴ جتا هـ = – $\frac{١}{\sqrt{٥}}$.

، ∵ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ⇐ جا هـ = ظا هـ × جتا هـ .

∴ جا هـ = ٢ × – $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$.

∵ قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$. ⇐ قتا هـ = $\frac{١}{\frac{-٢}{\sqrt{٥}}}$

∴ قتا هـ = $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ – ١٥) أثبت أن : (قتا هـ – ظتا هـ)^{٢} = $\frac{١ - \text{جتا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}}$

الحـــل

الطرف الأيمن = (قتا هـ – ظتا هـ)^{٢} = ($\frac{١}{\text{جا هـ}}$ – $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$)^{٢} = $\frac{(١ - \text{جتا هـ})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}$

= $\frac{(١ - \text{جتا هـ})(١ - \text{جتا هـ})}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$ = $\frac{(١ - \text{جتا هـ})(١ - \text{جتا هـ})}{(١ - \text{جتا هـ})(١ + \text{جتا هـ})}$ = $\frac{١ - \text{جتا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}}$ = الطرف الأيسر .

مثال (٧ – ١٦) أثبت أن : (ظا س + ظتا س)^{٢} = قا^{٢} س + قتا^{٢} س .

الحـــل

الطرف الأيمن = (ظا س + ظتا س)^{٢} = ظا^{٢} س + ظتا^{٢} س + ٢ ظا س ظتا س

= ظا^{٢} س + ظتا^{٢} س + ٢ × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ × $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ = ظا^{٢} س + ظتا^{٢} س + ٢

= (١ + ظا^{٢} س) + (١ + ظتا^{٢} س) = قا^{٢} س + قتا^{٢} س = الطرف الأيسر .

مثال (٧ – ١٧) برهن أن قا^{٢} هـ + قتا^{٢} هـ = $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ جتا}^{٢}\text{ هـ}}$.

الحـــل

الطرف الأيمن = قا^{٢} هـ + قتا^{٢} هـ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$ + $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ}}$ = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ جا}^{٢}\text{ هـ}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ جا}^{٢}\text{ هـ}}$ =

الطرف الأيسر ، لأن [جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١] .

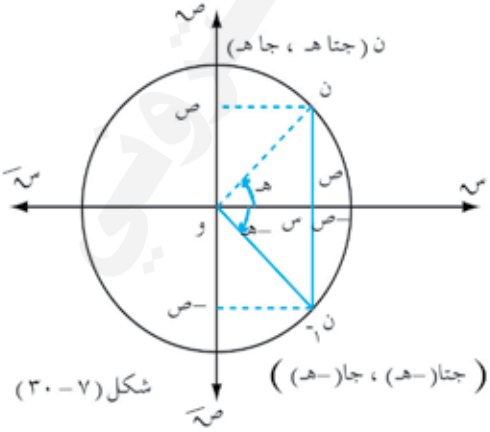
تأمل [الشكل(٧ – ٣٠)].. ماذا تلاحظ ؟

قارن بين النقطتين ن ، ن$_{١}$ ... ماذا تستنتج .

تلاحظ أن: ن$_{١}$(جتا (– هـ)، جا (–هـ)) هي نقطة لزاوية موجّهة قياسها (–هـ) ، وهي صورة للنقطة ن (جتا هـ ، جا هـ) بالإنعكاس في محور السينات فإذا كان (س، ص) إحداثيا ن فإن (س ، – ص) إحداثيا ن$_{١}$ ،

∴ جتا (–هـ) = س = جتا هـ

، جا (–هـ) = – ص = – جا هـ



شكل (٧ – ٣٠)

http://E-learning-moe.edu.ye

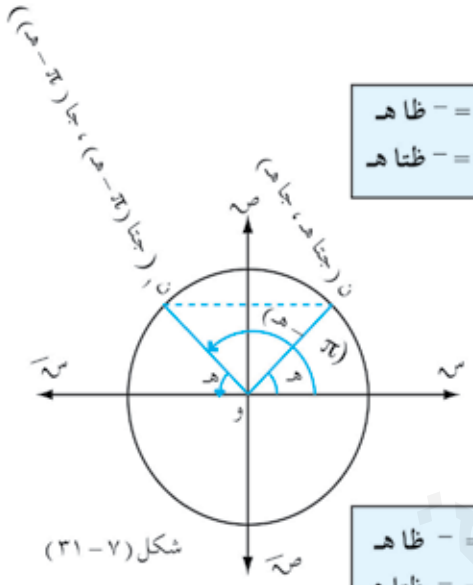
كذلك فإن :

$$\text{ظا}(-\text{هـ}) = \frac{\text{جا}(-\text{هـ})}{\text{جتا}(-\text{هـ})} = \frac{-\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = -\text{ظا هـ} \quad .$$

$$\text{ظتا}(-\text{هـ}) = \frac{1}{\text{ظا}(-\text{هـ})} = -\frac{1}{\text{ظا هـ}} = -\text{ظتا هـ} \quad .$$

إذن :

جتا (– هـ) = جتا هـ ،	ظا (–هـ) = – ظا هـ
جا (– هـ) = – جا هـ ،	ظتا (–هـ) = – ظتا هـ



شكل (٧ – ٣١)

تدريب (٧–٥)

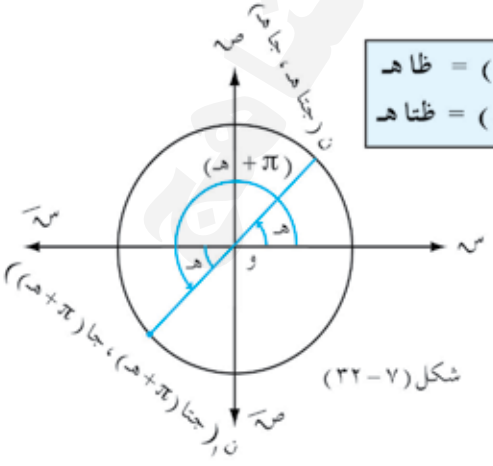
في [الشـــكل (٧ – ٣١)] قم بالمقارنة بين النقطتين ن ، ن' ، واستنتج العلاقات الممكنة ، ستحصل على أن :

جتا (π – هـ) = – جتا هـ ،	ظا (π – هـ) = – ظا هـ
جا (π – هـ) = جا هـ ،	ظتا (π – هـ) = – ظتا هـ

تدريب (٧–٦)

أعـد النشـــاط فـي التـدريـــب بالنسبـــة للشكل (٧ – ٣٢) تحصل على أن :

جتا (π + هـ) = – جتا هـ ،	ظا (π + هـ) = ظا هـ
جا (π + هـ) = – جا هـ ،	ظتا (π + هـ) = ظتا هـ

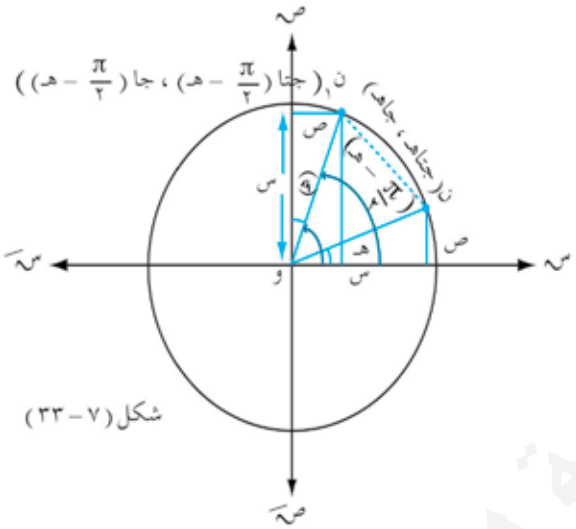


شكل (٧ – ٣٢)

http://E-learning-moe.edu.ye

تدريب (٧-٧)

أدرس الشكل (٧ – ٣٣) واستنتج العلاقات الممكنة .. تحصل على أن :



شكل (٧ – ٣٣)

جتا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$ = س = جا هـ ، ظا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$ = ظتا هـ	
جا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$ = ص = جتا هـ ، ظتا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$ = ظا هـ	

مثال (٧ – ١٨) أوجد كلاً من القيم التالية : أ) جتا (–٣٠°) ب) ظا (–٣٣٠°)

جـ) جا $(\frac{\pi ٥}{٦})$ د) جا (٢٤٠°) هـ) جا $\frac{\pi}{٦}$

الحـل

أ) جتا (–٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب) ظا (–٣٣٠°) = ظا (–٣٣٠° + ٣٦٠°) = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جـ) جا $\frac{\pi ٥}{٦}$ = جا $(\pi - \frac{\pi}{٦})$ = جا $\frac{\pi}{٦}$ = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

د) جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = – جا ٦٠° = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هـ) جا $\frac{\pi}{٦}$ = جا $(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٣})$ = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ - ١٩)

إذا كان جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، فأوجد س علماً بأن : ٠° < س < ١٨٠° .

الحـــل

∴ ٠° < س < ١٨٠° ، جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبة .

∴ الزاوية س لها قيمتان في الربع الأول والثاني .

في الربع الأول س = ٦٠° لأن جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وفي الربع الثاني س = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° لأن جا ١٢٠° = جا (١٨٠° − ٦٠°) .

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

تمارين ومسائل (٧ : ٤)

[١] أوجد النسب المثلثية للزوايا الآتية : −٦٠° ، ٢١٠° ، −٣π ، ٠ ، $\frac{٧\pi}{٣}$ ، ١٣٥° .

[٢] أوجد بدلالة القياس هـ النسب المثلثية التالية : علماً بأن هـ قياس زاوية حادة موجبة .

أ) ظتا (١٨٠° − هـ) . ب) ظتا (١٨٠° + هـ) .

جـ) قا (١٨٠° − هـ) . ء) قتا (١٨٠° − هـ) .

[٣] اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ})}{\text{ظا}(١٨٠^\circ + \text{هـ})} \times \frac{\text{ظتا}(٩٠^\circ - \text{هـ})}{\text{ظا}(٩٠^\circ + \text{هـ})} \times \frac{\text{جتا}(٣٦٠^\circ - \text{هـ})}{\text{جا}(-\text{هـ})}$$

[٤] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي : جا ١٥٠° ، جتا ($\frac{٢\pi}{٣}$) ، جا ٢٤٠° ، (جتا $\frac{٥\pi}{٤}$) ، قتا ١٣٥° .

[٥] اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة : (قا^{٤} س − ظا^{٤} س) − ظا^{٢} س .

[٦] أثبت أن : جا^{٢} جـ قتا جـ + جتا^{٢} جـ قا جـ = جا جـ + جتا جـ .

[٧] أثبت أن : (جا أ + قتا أ)^{٢} + (جتا أ + قا أ)^{٢} = ظا^{٢} أ + ظتا^{٢} أ + ٧ .

[٨] برهن ما يلي :

أ) (قتا جـ − ظتا جـ)^{٢} = $\frac{١ - \text{جتا جـ}}{١ + \text{جتا جـ}}$.

ب) $\sqrt{\frac{١ + \text{جتا جـ}}{١ - \text{جتا جـ}}} = \frac{\text{ظا جـ}}{\text{قا جـ} - ١}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

٧ : ٥ استخدام الآلة الحاسبة في حساب المثلثات

يمكن بواسطة الآلات الحاسبة إجراء العمليات الحسابية والحصول على قيم ونتائج نسب مثلثية وتوفر الكثير من الجهد والوقت الذي ممكن أن يضيع عليك إذا استخدمت الجداول المثلثية. لاتنسى أن الآلات الحاسبة أنواع وكل نوع له طريقة خاصة في الاستعمال ، لكن يوجد مع كل آلة دليل الآلة (كتيب) يشرح طريقة استعمالها ، ومع ذلك هناك سمات مشتركة بين الآلات .

قبل استخدام الآلة نفسها : عليك أولاً أن تتعرف على بعض المفاتيح التي تمثل الرموز اللاتينية للنسب المثلثية في الآلات الحاسبة.

Sin مفتاح « جا » ، (Sin) اختصاراً لكلمة (Sine) التي تعني « جيب ».

Cos مفتاح « جتا » ، (Cos) اختصاراً لكلمة (Cosine) التي تعني « جيب تمام » .

tan مفتاح « ظا » ، (tan) اختصاراً لكلمة (tangent) التي تعني « ظل » .

وعند الضغط على أي من هذه المفاتيح الثلاثة بعد إدخال عدد نحصل على قيمة النسبة المثلثية المعنية .

O,,, يستخدم لإدخال أجزاء الدرجة (الدقيقة – الثانية)وللتحويل من دائري إلى ستيني وبالعكس .

Inv يستخدم لمعرفة قياس الزاوية التي عُلمتْ إحدى نسبها المثلثية وله وظائف أخرى .

I\X مفتاح نظير أو مقلوب عدد ≠ صفر .

ab\C d\CI يستخدم للكسر ، والعدد الكسري .

فمثلاً : لإدخال ٤٥° ١٥َ ٣٥ْ إلى الآلة الحاسبة نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي من اليسار إلى اليمين.

→ 0,,, 5 4 0,,, 5 1 0,,, 5 3

فيظهر على الشاشة : 45 15 35

ولإظهار قياس الزاوية بالصورة المطلوبة نستخدم المفتاحين الآتيين على التوالي : 0,,, Inv

45 15 35

تدريب (٧-٨) أدخل إلى الحاسبة قياس كل من الزاويتين : أ) ٥٠َ ٤٠° . ب) ٣٥ْ ١٥َ ٤٢° .

١ – إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها معلوم :

نستخدم الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) إذا علم قياس الزاوية .

ملاحظة : « عندما يكون قياس الزاوية بالدرجات وأجزائها نجعل الحاسبة على الوضع DEG .

مثال (٧ – ٢٠) أوجد جا ٧٠ْ .

الحل

لإيجاد جا ٧٠ْ نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : فيظهر على الشاشة 0,93969 Sin 0 7 ،

نقرب الناتج لأربعة أرقام عشرية . ∴ جا ٧٠ْ ≈ ٠,٩٣٩٦ .

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ - ٢١) أوجد ما يأتي : أ) ظا ٢٢° ، ب) جا ٤٥,٥° .

جـ) قا ٣٠ َ ٤٥° .

الحـــل

أ) لإيجاد ظا ٢٢° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي : [tan] [2] [2] [→] .

فيظهر على الشاشة : 0,4040

∴ ظا ٢٢° = ٠,٤٠٤٠

ب) لإيجاد جا ٤٥,٥° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

[Sin] [5] [.] [5] [4] [→]

فيظهر على الشاشة : 0,7133 ∴ جا ٤٥,٥° = ٠,٧١٣٣

جـ) لإيجاد قا ٣٠ َ ٤٥° نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

[I\X] [Cos] [0,,,] [0] [3] [0,,,] [5] [4] [→]

فيظهر على الشاشة 1,4267 إذن قا ٣٠ َ ٤٥° = ١,٤٢٧

مثال (٧ - ٢٢) إذا كان ٠° ≤ س° ≤ ٩٠° ، أوجد قيمة س فيما يأتي :

أ) ظا س = $\sqrt{٣}$ ب) جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ) قتا س = $\sqrt{٢}$.

الحـــل

أ) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

[tan] [Inv] [√] [3]

فيظهر على الشاشة 60 إذن س = ٦٠° .

ب) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

[Cos] [inv] [=] [2] [÷] [√] [3]

فيظهر على الشاشة 30 إذن س = ٣٠° .

جـ) لإيجاد قيمة س نستخدم المفاتيح الآتية على التوالي :

[Sin] [Inv] [I\X] [√] [2]

فيظهر على الشاشة 45 إذن س = ٤٥° .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٧ : ٥)

[١] باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلٍّ من :

أ) جا ٤٥َ ١٥ْ . ب) جتا ٤٥َ ١٥ْ . جـ) ظا ٥٠ً ٣٠َ ١١٥ْ .

د) جا (−٢٢٥ْ) . هـ) قتا ٣٢,٥ْ .

[٢] أكمل الجدول (٧ − ٥) مستعيناً بالآلة الحاسبة :

س	جا س	جتا س	ظا س
صفر	صفر	.....	.....
١٣٠ْ	.....	.....	−١,١٩١٨
٢٥٠ْ	.....	.....	.....
−٧٠٠ْ	.....	.....	.....

[٣] أوجد قيمة كل مقدار مما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة :

أ) جا ٤٠ْ + ٢ − ٣ جتا ٦٠ْ . ب) ٣ جتا ٣٣٠ْ ظا ٢٤٠ْ + ٢جتا ١٣٥ْ ظا ٤٥ْ جا ٩٠ْ .

جـ) جا (− ٦٠ْ) ظا ٢١٠ْ + جا ٧٢٠ْ .

[٤] اكتب العملية ، ثم أوجد الناتج وفق استخدام مفاتيح آلة حاسبة على النحو التالي :

8	0	0,,,	4	5	0,,,	tan

[٥] إذا كانت ٠ْ ≤ س ≤ ١٨٠ْ . أوجد قيمة س لكل مما يأتي :

أ) جا س = ٠,٢٥٦٠ . ب) قا س = − ٢,٥٧١٩ .

جـ) ظتا س = ٠,٤١٤٢ .

٦ : ٧ حل المثلث القائم

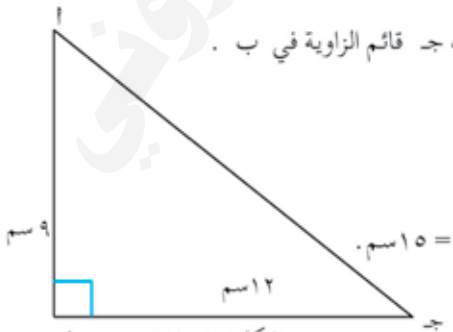
تعرفت سابقاً على العلاقات العددية في مثلث قائم الزاوية ، كما تعرفت على مبرهنة فيثاغورث « مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين » .

تدريب (٧-٩) في [الشكل (٧-٣٤)] المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

| أ ب | = ٩سم ،

| ب جـ | = ١٢سم ، أوجد | أ جـ | .

لاشك أنك حصلت على أن | أ جـ | = ١٥سم.



شكل (٧ − ٣٤)

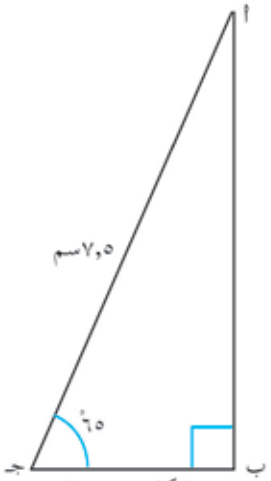
http://E-learning-moe.edu.ye

وفي هذا البند ندرس حل المثلث القائم الزاوية ، ونعني بحل المثلث تعيين عناصره الستة (٣ أضلاع ، ٣ زوايا، وتعطى عادة ثلاثة عناصر أحدها على الأقل طول ضلع ، ويلزم تعيين العناصر الثلاثة الأخرى .

وسنأخذ في هذا البند حالتين .

أولاً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية .

مثال (٧ – ٢٣) حل المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب ، والذي فيه ق(∡ جـ) = ٦٥° ، | ا جـ | = ٧,٥سم .



شكل (٧ – ٣٥)

الحـــل

∵ ق(∡ جـ) = ٦٥° .

∴ ق(∡ ا) = ٩٠° – ٦٥° = ٢٥° .

$\frac{|ا ب|}{|ا جـ|}$ = جا جـ . ، | ا جـ | = ٧,٥ سم .

∴ $\frac{|ا ب|}{٧,٥}$ = جا ٦٥° .

ومنه | ا ب | = ٧,٥ جا ٦٥° (باستخدام الآلة الحاسبة ، والتقريب لأربعة أرقام عشرية) .

≈ ٧,٥ × ٠,٩٠٦٣ .

≈ ٦,٨ سم .

$\frac{|ب جـ|}{|ا جـ|}$ = جتا جـ . $\frac{|ب جـ|}{٧,٥}$ = جتا ٦٥° .

∴ | ب جـ | = ٧,٥ جتا ٦٥° = ٧,٥ × ٠,٤٢٢٦ ≈ ٣,٢ سم .

ثانياً – حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طولا ضلعين :

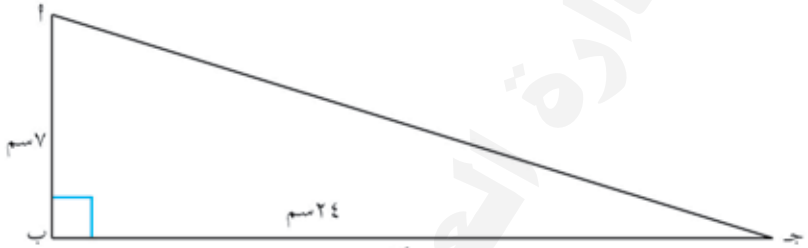
مثال (٧ – ٢٤) المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب إذا كان | ا ب | = ٧سم ، | ب جـ | = ٢٤سم. فأوجد :

| ا جـ | ، ق(∡ ا) ، ق(∡ جـ) .

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

لاحظ [الشكل (٧ – ٣٦)] : $|\overline{أجـ}|^{٢} = |\overline{أب}|^{٢} + |\overline{ب جـ}|^{٢}$ ... (مبرهنة فيثاغورث).



شكل (٧ – ٣٦)

$|\overline{أجـ}|^{٢} = (٧)^{٢} + (٢٤)^{٢}$.

$= ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$.

∴ $|\overline{أجـ}| = \sqrt{٦٢٥} = ٢٥$سم والآن نجد قياسات الزوايا

∵ جا جـ $= \frac{|\overline{أب}|}{|\overline{أجـ}|} = \frac{٧}{٢٥} = ٠,٢٨٠٠$.

∴ ق(∡ جـ) = ١٦° ١٦′ (باستخدام الآلة الحاسبة والتقريب إلى الدقائق) .

∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠° ، ق(∡ ب) = ٩٠°

، ق(∡ جـ) = ١٦° ١٦′ .

∴ ق(∡أ) = ٩٠° – ١٦° ١٦′ = ٧٣° ٤٤′ .

تمارين ومسائل (٧ : ٦)

(استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد نواتج العمليات لأربعة أرقام عشرية) .

[١] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب في كل من الحالات الآتية :

أ) $|\overline{أجـ}|$ = ٧٠سم ، ق(∡ جـ) = ٥٠° .

ب) $|\overline{أجـ}|$ = ٥٠سم ، ق(∡ جـ) = ٣٥° .

جـ) $|\overline{أجـ}|$ = ١٢سم ، ق(∡ جـ) = ٣٦° ٤٧′ .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٢] س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص . أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$ في الحالات التالية :

أ) | ع ص | = ٨٠سم ، ق(∡ع) = ٦٢° .

ب) | ع ص | = ٤٣,٥ سم ، ق(∡ع) = ٧٠° .

[٣] حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ في كل من الحالات الآتية :

أ) | أ جـ | = ١٠سم ، | أ ب | = ٢٠سم .

ب) | أ جـ | = ١٢,٥سم ، | أ ب | = ١٨سم .

جـ) | أ ب | = ٨سم ، جا ب = ٠,٧٨٨٠ .

د) | ب جـ | = ٩سم ، جتا ب = ٠,٢٢٥٠ .

هـ) | أ جـ | = ٢ | ب جـ | ، | أ ب | = ٨٠ .

[٤] ك ل م مثلث قائم الزاوية في ل فيه | ك ل | = ٢٤,٣٧ متراً ، | ك م | = ٦٢,٩٩ متراً . أوجد كلاً من | ل م | ، ق(∡م) ، ق(∡ك) .

٧ : ٧ تطبيقات على حل المثلث القائم

هناك تطبيقات كثيرة لحل المثلث القائم الزاوية في كثير من المواقف الحياتية منها : حساب مسافات وارتفاعات وانخفاضات يصعب إيجادها بالقياس العملي المباشر ، وفيما يلي بعض الأمثلة لذلك :

مثال (٧ - ٢٥) شاهد شخص عمود كهرباء من نقطة على سطح الأرض تبعد عن قاعدته ٣٠ متراً ، فكانت زاوية ارتفاع عمود الكهرباء ٣٠° . أوجد ارتفاع العمود عن سطح الأرض .

الحل

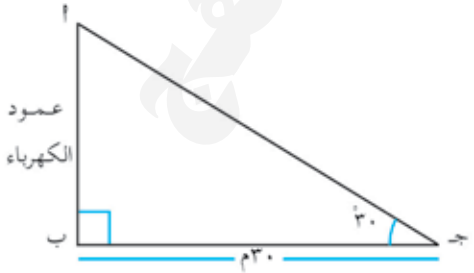
لاحظ [الشكل (٧-٣٧)] حيث أ ب يمثل ارتفاع عمود الكهرباء ، ق(∡جـ) = ٣٠° (هي زاوية الارتفاع) ، | ب جـ | = ٣٠ م

لإيجاد | أ ب | نستخدم العلاقة :

$$\text{ظا}(\angle \text{جـ}) = \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{ب جـ}|} ،$$

$$\therefore ، \frac{|\text{أ ب}|}{٣٠} = \text{ظا } ٣٠° .$$

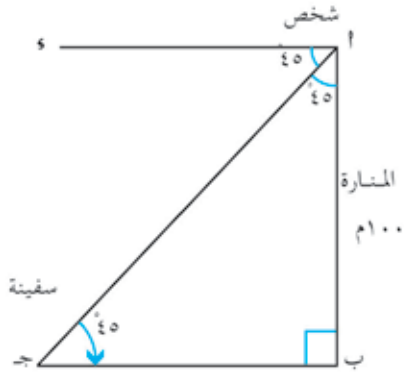
$$\therefore | \text{أ ب} | = ٣٠ \text{ ظا } ٣٠° = \frac{٣٠}{\sqrt{٣}} \text{ م} = ١٠\sqrt{٣} \text{ م} .$$



شكل (٧ - ٣٧)

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٧ – ٢٦) شخص ينظر إلى سفينة في البحر من خلال منارة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر ، وجد أن قياس زاوية الانخفاض للسفينة في البحر هي ٤٥° ، فما بعد السفينة عن قاعدة المنارة لأقرب متر .



الحـــل

لاحظ [الشكل (٧–٣٨)] أ ب يمثل المنارة ، ∡ جـ أ ء زاوية الانخفاض . شكل (٧ – ٣٨)

∴ ق (∡ ب أ جـ) = ٤٥° ، ومنه $\frac{|ب\,جـ|}{|أ\,ب|}$ = ظا (∡ ب أ جـ) .

∴ $\frac{|ب\,جـ|}{|أ\,ب|}$ = ظا ٤٥° . ∵ | أ ب | = ١٠٠م

∴ | ب جـ | = ١٠٠ × ظا ٤٥° = ١٠٠ × ١ . ∴ | ب جـ | = ١٠٠ م .

تمارين ومسائل (٧ : ٧)

[١] من نقطة على سطح الأرض على بعد ٦٠ متراً من قاعدة برج وجد أن زاوية ارتفاع قمته ٣٠° . أوجد ارتفاع البرج .

[٢] سلّم يرتكز على حائط رأسي ،، فإذا كان طول السلم ٢٠ قدما ويبعد موقعه عن الحائط ١٠ أقدام . أوجد زاوية ميل السلم عن الأرض ، ثم أوجد (البعد بين نقطة ارتكازه على الجدار والأرض) .

[٣] قيست زاوية انخفاض قارب في البحر من أعلى فنار ارتفاعه عن سطح البحر ٦٠ متراً فوجدت ٢١° ٢٥َ . فما بُعد القارب عن موقع الفنار مقرباً لأقرب متر .

[٤] من نقطة تبعد ١٥٠ متراً عن قاعدة سارية علم وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة السارية ١٠° ٢٥َ . فما ارتفاع السارية لأقرب متر ؟

[٥] من نقطة على سطح الأرض وجد رجل أن زاوية ارتفاع قمة جبل هي ٣٢° ٢١َ ، ولما سار نحو الجبل مسافة ٨٠٠ متراً وجد أن زاوية ارتفاع قمة الجبل ٥٠° . أوجد ارتفاع قمة الجبل عن سطح الأرض .

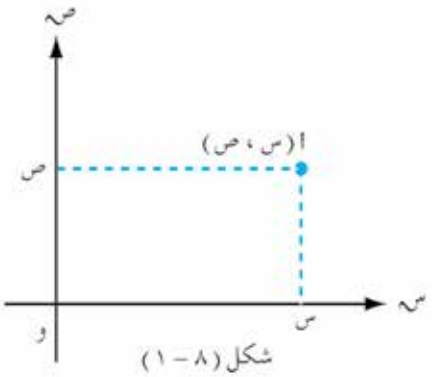
[٦] من نقطة على سطح عمارة ترتفع ١٥م عن سطح الأرض وجد شخص أن زاوية ارتفاع قمة عمارة أخرى تقابله ٣٠° ، وأن زاوية انخفاض قاعدة تلك العمارة ٢٥° . أوجد ارتفاع العمارة المقابلة للشخص والمسافة بين العمارتين .

http://E-learning-moe.edu.ye

٨ : ١ مـــراجـعـــة

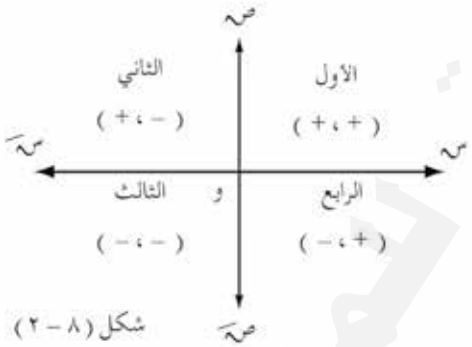
تعرفت في المرحلة الأساسية أن كل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً ، كما أن كل عدد حقيقي يمكن أن يمثل بنقطة على خط الأعداد . كذلك كل نقطة في المستوى الديكارتي يمكن تمثيلها بزوج مرتب من الأعداد .

مثل النقطة أ (س ، ص) كما في شكل (٨ – ١) حيث س الإحداثي السيني للنقطة أ ، ص الإحداثي الصادي للنقطة أ .



شكل (٨ – ١)

ومحورا الإحداثيات يقسما المستوى إلى أربعة أجزاء يطلق عليها الأرباع موضحة كما في [الشكل (٨ – ٢)]. في الربع الأول الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما موجب ،في الربع الثاني الإحداثي السيني سالب والإحداثي الصادي موجب، في الربع الثالث الإحداثي السيني والإحداثي الصادي كلاهما سالب ، وفي الربع الرابع الإحداثي السيني موجب والإحداثي الصادي سالب .



شكل (٨ – ٢)

تدريب (٨–١) حـــدد في أي ربـع تقع كل من النقاط التالية : (١ ، ٢) ، (–٣ ، ١) ، $(-\frac{٣}{٢} ، -٢)$ ، (٣ ، –١) ، ثم ارسمها في المستوى الإحداثي، وتأكد من صحة إجابتك.

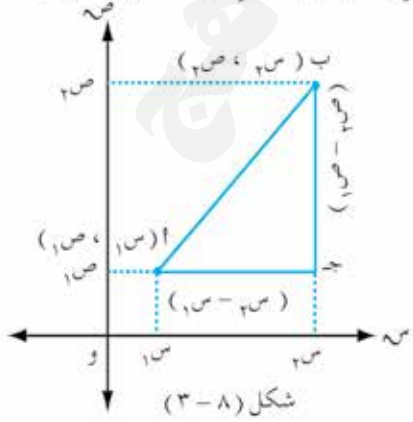
المسافة بين نقطتين :

لتكـن لدينـا النقطتـان أ (س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢)انظر [الشكل (٨–٣)]يمكن إيجاد المسافة بينهما باستخدام مبرهنة فيثاغورث .

$$|أب|^{٢} = |أجـ|^{٢} + |جـب|^{٢}$$

$$= (س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}$$

ومنه $|أب| = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$.



شكل (٨ – ٣)

http://E-learning-moe.edu.ye

ملاحظة: منتصف $\overline{أب}$ هي النقطة $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$.

مثال (٨ - ١) أوجد البعد بين النقطتين أ (−١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٧) ، وإحداثي منتصف القطعة الواصلة بينهما .

الحـــل

$|أب| = \sqrt{(٢ - (-١))^{٢} + (٧ - ٣)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

منتصف $\overline{أب}$ هي النقطة $\left(\frac{-١ + ٢}{٢} ، \frac{٣ + ٧}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، ٥\right)$.

تمارين ومسائل (٨ : ١)

[١] أوجد البعد بين كل زوج من أزواج النقاط التالية ، ثم أوجد إحداثي نقطة المنتصف :

أ) (٤ ، ١) ، (−٢ ، ٩) ، ب) (٦ ، ٣) ، (١ ، ٥) ،

جـ) (٤ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، د) (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ،

هـ) (−٣ ، −٢) ، (٤ ، −٢) ، و) (−٣ ، −٤) ، (٣ ، ٤) .

[٢] لتكن أ(٤ ، −٦) ، ب (−٥ ، ٣) . أوجد إحداثي النقطة جـ التي تنصف القطعة أب ، ثم احسب $|أجـ|$ ، $|جـب|$ وقارن بينهما .

[٣] أثبت أن النقاط أ(−١ ، ١) ، ب (١ ، −٣) ، جـ(٧ ، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٤] أثبت أن أ(١ ، −٤) ، ب (٣ ، ١) ، جـ(−٢ ، ٣) ، د (−٤ ، −٢) هي رؤوس مربع .

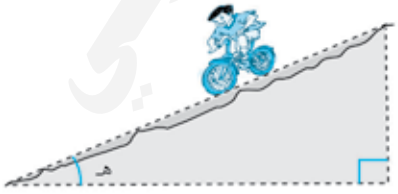
[٥] أوجد الجزء المقطوع من محور السينات ، والجزء المقطوع من محور الصادات للحالات التالية :

أ) ص = س − ١ ، ب) ص + ٢ س −٣ = ٠ ،

جـ) ص − ٢ س = ٦ ، د) س − ٣ ص + ٦ = ٠ .

٨ : ٢ ميـــل المستقيـم

إذا كنت طالعاً جبلاً ما ماشياً ، أو راكباً دراجة ، فإن حركتك تقل تدريجياً ؛ وكلما كان الجبل أكثر انحداراً ، كلما كانت عملية الصعود بطيئة . إن قياس انحدار الجبل أو ميله هو عبارة عن نسبة المسافة العمودية على المسافة الأفقية ، وبالرجوع إلى [الشكل (٨ − ٤)] نجد أن :



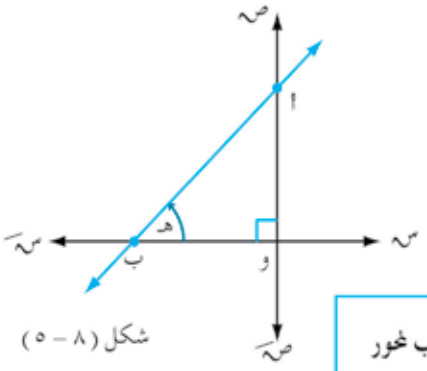
شكل (٨ − ٤)

http://E-learning-moe.edu.ye

انحدار الجبل أو ميله = المسافة العمودية / المسافة الأفقية = ٢٠٠ متر / ٥٠٠ متر ، = ٢/٥ = ظا هـ .

لنفرض أن هـ هي الزاوية الموجبة (الاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعة) المحصورة بين المستقيم أ ب والاتجاه الموجب لمحور السينات [شكل (٨ – ٥)]

فإن ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $\frac{|أ و|}{|ب و|}$ = ظا هـ .



شكل (٨ – ٥)

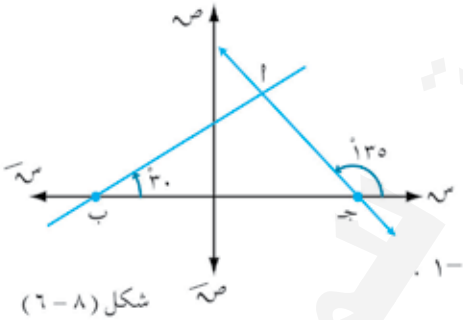
تعريف (٨ : ١)

ميل المستقيم: هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له بالرمز م أي أن م = ظا هـ . ، «هـ قياس زاوية الميل» .

إذا كانت زاوية الميل حادة فإن الميل يكون موجباً ، وإذا كانت منفرجة فإن الميل يكون سالباً .

مثال (٨ – ٢) أوجد ميل كل من المستقيمين أ ب ، أ جـ في [الشكل (٨–٦)]

الحل



شكل (٨ – ٦)

ليكن $م_1$ ، $م_2$ ميلي $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ على التوالي.

∴ $م_1$ = ظا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ،

$م_2$ = ظا ١٣٥° = ظا (١٨٠° – ٤٥°) = – ظا ٤٥° = –١ .

المستقيمات المتوازية :

أنظر [الشكل (٨–٧)] ليكن : ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ = $م_1$ = ظا $هـ_1$

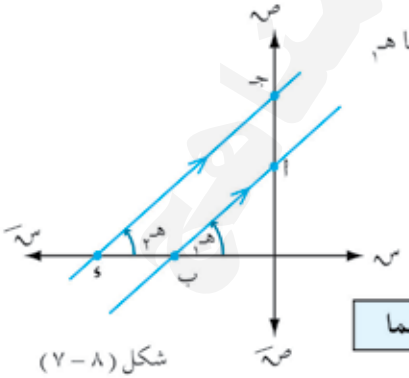
ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $م_2$ = ظا $هـ_2$

∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$

∴ $هـ_1$ = $هـ_2$ (متناظرتان)

∴ ظا $هـ_1$ = ظا $هـ_2$

∴ $م_1$ = $م_2$ ، وعليه فإنه :



شكل (٨ – ٧)

يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا تساوى ميلاهما

رمزياً : $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⇔ م ($\overleftrightarrow{أ ب}$) = م ($\overleftrightarrow{جـ ء}$) .

ملاحظات :

عندما تكون هـ = ٠° فإن ظا هـ = ٠ ، وعليه فإن ميل المحور السيني ، وميل أي مستقيم موازٍ له يساوي صفراً .

http://E-learning-moe.edu.ye

المستقيمات المتعامدة :

انظر [الشكل (٨ – ٨)] : ليكن

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $م_1$ = ظا $هـ_1$

ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $م_2$ = ظا $هـ_2$

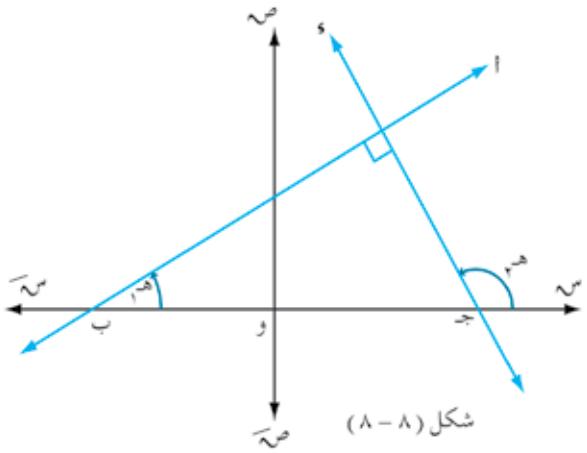
∵ ق (∡ $هـ_2$) = ٩٠° + ق (∡ $هـ_1$)

∴ ظا $هـ_2$ = ظا (٩٠° + $هـ_1$)

= – ظتا $هـ_1$ = $-\frac{١}{\text{ظا } هـ_1}$.

∴ ظا $هـ_1$ • ظا $هـ_2$ = – ١

وعليه فإنه :



شكل (٨ – ٨)

يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي – ١

ونعبر عن ذلك رمزياً : $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ ⇔ م ($\overleftrightarrow{أب}$) • م ($\overleftrightarrow{جـ ء}$) = – ١

ملاحظة: عندما تكون هـ = ٩٠° ، فإن ظا هـ غير معرف ، وعليه فإن ميل المحور الصادي ، وأي مستقيم موازٍ له غير معرف .

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه :

انظر [الشكل (٨–٩)] : ليكن :

أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) نقطتان واقعتان على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ الذي زاوية ميله هـ .

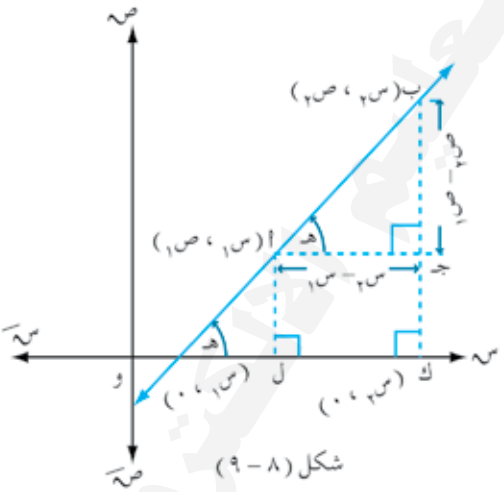
أسقط $\overleftrightarrow{أل}$ ، $\overleftrightarrow{ب ك}$ عموديين على المحور السيني ، و $\overleftrightarrow{أجـ} \perp \overleftrightarrow{ب ك}$.

∴ ظا هـ = $\frac{|ب جـ|}{|أ جـ|}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ؛

حيث $س_2 - س_1 \neq ٠$

∵ الميل = ظا هـ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ؛ حيث $س_2 - س_1 \neq ٠$

أي أن :



شكل (٨ – ٩)

ميل مستقيم يمر بنقطتين = فرق الإحداثيين الصاديين / فرق الإحداثيين السينيين

مثال (٨ – ٣) لتكن أ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٢ ، –٣) ، ء (– ١ ، –١) ، هـ (٢ ، $\frac{٧}{٢}$) .

أوجد ميل كل من المستقيمات $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ ، وما العلاقة بينها .

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $م_1$ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي لـ ب – الإحداثي الصادي لـ أ}}{\text{الإحداثي السيني لـ ب – الإحداثي السيني لـ أ}}$ = $\frac{\text{صفر} - ٢}{٣ - \text{صفر}}$ = $-\frac{٢}{٣}$.

وبالمثل :

ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = $م_2$ = $\frac{-١ - (-٣)}{-١ - ٢}$ = $-\frac{٢}{٣}$.

ميل $\overleftrightarrow{ء هـ}$ = $م_3$ = $\frac{\frac{٧}{٢} - (-١)}{(-١) - ٢}$ = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$.

نلاحظ أن : $م_1$ = $م_2$ = $-\frac{٢}{٣}$ ، ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$.

أيضاً : $م_1 \cdot م_3$ = $-\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢}$ = −١

∴ $\overleftrightarrow{ء هـ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ، وكذلك $\overleftrightarrow{ء هـ} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$.

تمارين ومسائل (٨ : ٢)

[١] أوجد ميل المستقيم الواصل بين كل زوج من أزواج النقاط التالية :

أ) (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٣) ب) (−٢ ، ٤) ، (−٥ ، ٨)

جـ) (−٥ ، −٣) ، (٤ ، ٣) ء) (س ، ص) ، (ع ، س)

هـ) (س ص^2 ، ٢ س ص) ، (س ع^2 ، ٢ س ع) .

[٢] لتكن أ(٤ ، −٣) ، ب (٦ ، ٥) ، جـ(٥ ، ١) . أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، ومن ثم أثبت أن النقاط المذكورة تقع على إستقامة واحدة .

[٣] أثبت أن النقاط (٦ ، ٣) ، (−٣ ، ٠) ، (١٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة .

[٤] أوجد قيمة ص التي تجعل النقطة (٣ ، ص) تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين (−٢ ، −١) ، (١ ، ٣) .

[٥] أثبت أن المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ١١) عمودياً على المستقيم الواصل بين النقطتين(٨ ، ٢) ، (−٣ ، ٦) .

[٦] أثبت أن النقاط التالية هي رؤوس متوازي أضلاع ، ثم بين أياً منهما مستطيلاً :

أ) (−٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (−١ ، ٠) .

ب) (٥ ، −٤) ، (−١١ ، ١٦) ، (−١ ، ٤) ، (−٥ ، ٨) .

[٧] أثبت أن النقاط (١ ، −٤) ، (٣ ، ١) ، (−٢ ، ٣) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

[٨] أوجد قيمة س بحيث تكون النقاط (−٤ ، −٢) ، (٢ ، ٥) ، (س ، −١) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية عند (٢ ، ٥) .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٩] النقطة أ (−٣ ، ٠) ، ب (٧ ، −٦) ، جـ (٤ ، ٢) هي رؤوس مثلث . أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي أي ضلعين يوازي الضلع الثالث .

٨ : ٣ معادلة المستقيم

تعرف أن المعادلة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين ، ويمثلها بيانياً في المستوى الإحداثي خطاً مستقيماً يمر بالنقطتين :

(− جـ/أ ، ٠) ، (٠ ، − جـ/ب) الواقعتين على محوري السينات والصادات على التوالي ، ويقدر ميله بالعدد − أ/ب أي أن : مـ = − أ/ب = − معامل س / معامل ص .

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة العامة للمستقيم ، وهناك صور أخرى لكتابة معادلة المستقيم ولكن قد تكون إحداها أكثر ملاءمة من الأخرى وفقاً للاستخدام الذي ستوضع فيه المعادلة .

أولا : معادلة مستقيم بمعلومية ميله وما يقطعه من محور الصادات :

ليكن أ ب مستقيماً ميله مـ ، ويقطع جـ وحده من محور الصادات [شكل (٨−١٠)] .

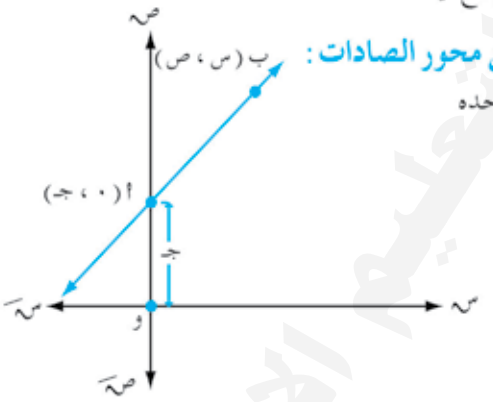
فإن (٠ ، جـ) هي إحداثي النقطة أ .

أفرض أن (س ، ص) إحداثي النقطة ب .

∴ ميل أ ب = مـ = (ص − جـ) / (س − ٠)

ومنه مـ (س − ٠) = ص − جـ

أو ص = مـ س + جـ



شكل (٨ − ١٠)

وعليه فإن معادلة المستقيم أ ب بمعلومية ميله مـ ، وما يقطعه من محور الصادات (جـ وحده) هي :

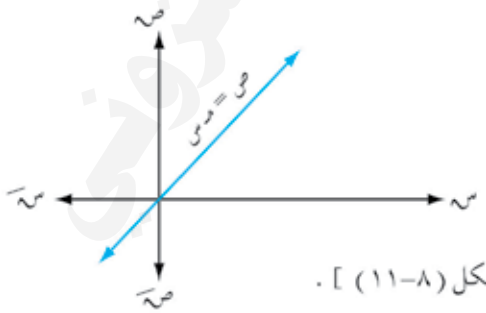
ص = مـ س + جـ ——— (١)

حالات خاصة :

١ − عندما جـ = ٠ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة

ص = مـ س .

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله مـ [شكل (٨−١١)] .



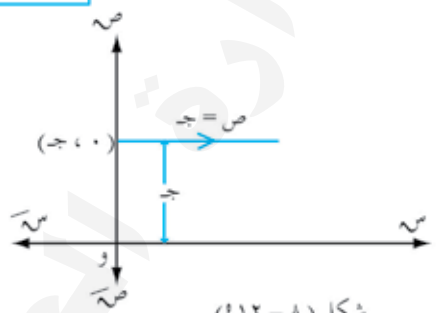
شكل (٨ − ١١)

http://E-learning-moe.edu.ye

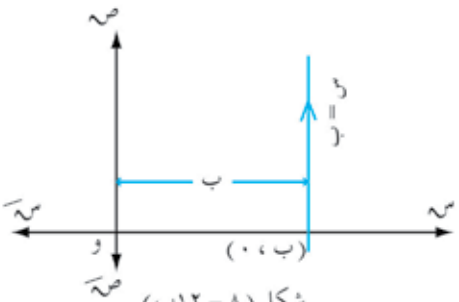
٢ – عندما $م = ٠$ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة $ص = جـ$.

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه جـ وحدة [شكل (٨ – ١٢أ)] . أما معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات وعلى بعد ب وحدة منه [الشكل (٨ – ١٢ب)] فهي :

$س = ب$.



شكل (٨ – ١٢أ)



شكل (٨ – ١٢ب)

٣ – عندما $م = ٠$ ، $جـ = ٠$ ، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة : $ص = ٠$ ، وهي معادلة محور السينات.

أما معادلة محور الصادات فهي $س =$ صفر .

مثال (٨ – ٤) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيمان التاليان :

أ) $ص = ٤ س – ٣$ ، ب) $٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠$.

الحـــل

أ) المستقيم $ص = ٤ س – ٣$ ، ميله ٤ ، ويقطع ٣ وحدات من محور الصادات السالب ، أي يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، –٣) .

ب) المستقيم $٢ ص + ٣ س – ٤ = ٠$ يمكن كتابة معادلته على الصورة : $ص = -\frac{٣}{٢} س + ٢$.

وعليه فإن ميله $-\frac{٣}{٢}$ ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢) .

مثال (٨ – ٥) ما العلاقة بين كل زوج من أزواج المستقيمان التاليان :

أ) $ص = ٣ س – ٤$ ، ب) $ص = ٣ س – ٢$

$ص = ٣ س + ٥$ $ص = -\frac{١}{٣} س + ٥$.

الحـــل

أ) المستقيمان $ص = ٣ س – ٤$ ، $ص = ٣ س + ٥$

$\because م_١ = ٣$ ، $م_٢ = ٣$. $\therefore$ المستقيمان متوازيان .

http://E-learning-moe.edu.ye

ب) المستقيمان ص = ٣ س – ٢ ، ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٥ متعامدان لأن حاصل ضرب ميليهما يساوي –١

$م_{١} \times م_{٢} = ٣ \times -\frac{١}{٣} = -١$.

مثال (٨ – ٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع ٥ وحدات من محور الصادات الموجب وموازٍ للمستقيم:

٤ س – ٦ ص = ٩ .

الحـــل

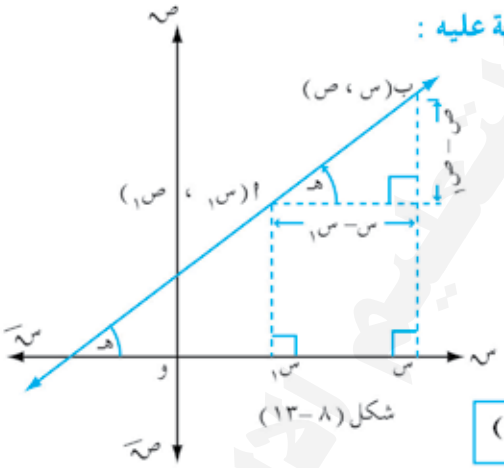
ليكن $\overleftrightarrow{ل}$ هو المستقيم المطلوب إيجاد معادلته . نكتب معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$: ٤ س – ٦ ص = ٩ بالصورة :

ص = $\frac{٢}{٣}$ س – $\frac{٣}{٢}$ فيكون ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ = $\frac{٢}{٣}$ ،ومعادلته هي ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٥ .

∴ ٣ ص = ٢ س + ١٥ أو ٢ س – ٣ ص + ١٥ = ٠ .

ثانياً : معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة واقعة عليه :

المستقيم أ ب يمر بالنقطة (س١ ، ص١) ، وميله هـ [شكل (٨–١٣)].(س ، ص) نقطة واقعة عليه . إذن ميل $\overleftrightarrow{أ ب}$ بمعلومية نقطتين واقعتين عليه : هـ = $\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}}$.



شكل (٨–١٣)

∴ ص – ص١ = هـ(س – س١) ، وعليه فإن معادلة المستقيم الذي ميله هـ ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي :

ص – ص١ = هـ (س – س١)

مثال (٨ – ٧) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ، ويمر بالنقطة (١ ، ٢) .

الحـــل

معادلة المستقيم الذي ميله هـ ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي : ص – ص١ = هـ(س – س١) .

من المعطيات فإن هـ = ٣ ، س١ = ١ ، ص١ = ٢ ،

وبالتعويض في المعادلة نحصل على : ص – ٢ = ٣ (س – ١) = ٣ س – ٣ .

∴ ٣ س – ص – ١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ – ٨) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وموازٍ للمستقيم ٣ ص – ٦ س = ٧ .

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

يمكن كتابة المعادلة ٣ ص – ٦ س = ٧ بالصورة ص = ٢ س + $\frac{٧}{٣}$.

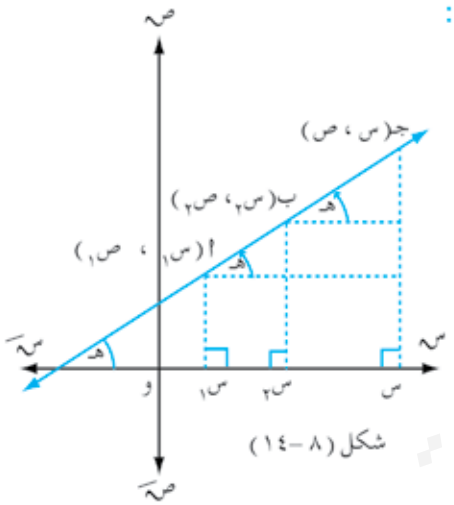
∵ المستقيمان متوازيان ، يكون ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) يساوي ٢ ، وتكون معادلته :

ص – ٠ = ٢ (س – ٤) ∴ ص = ٢ س – ٨ .

ثالثاً : معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه :

ليكن $\overleftrightarrow{أب}$ مستقيماً يمر بالنقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) [شكل (٨ – ١٤)] .

لنأخذ النقطة جـ (س ، ص) الواقعة عليه :



شكل (٨ – ١٤)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ بمعلومية أ ، جـ = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$.

وميل $\overleftrightarrow{أب}$ بمعلومية النقطتين أ ، ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

وعليه فإن : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

أي أن معادلة المستقيم بمعلومية النقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) الواقعتين عليه هي :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

مثال (٨ – ٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (–٣ ، ٥) .

الحـــل

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هي : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

من المعطيات فإن : س١ = ١ ، ص١ = ٢ ، س٢ = –٣ ، ص٢ = ٥ ، وبالتعويض في المعادلة نجد :

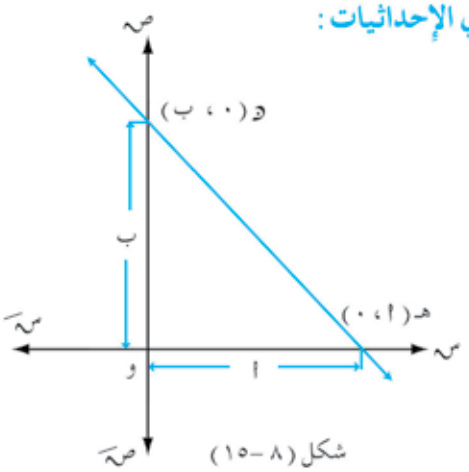
$$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٥ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٣}{-٤}$$

⇐ –٤ (ص – ٢) = ٣ (س – ١) ⇐ –٤ ص + ٨ = ٣ س – ٣

∴ ٣ س + ٤ ص – ١١ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

http://E-learning-moe.edu.ye

رابعاً : معادلة المستقيم بمعلومية ما يقطعه من محوري الإحداثيات :



ليكن $\overleftrightarrow{هـ د}$ مستقيماً يقطع أ وحدة من محور السينات ، ويقطع ب وحدة من محور الصادات [شكل (٨ – ١٥)] .

∴ $\overleftrightarrow{هـ د}$ يمر بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ب)

واستناداً إلى معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين نجد أن :

$$\frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{ب - ٠}{٠ - أ}$$

∴ – أ ص = ب س – أ ب .

∴ ب س + أ ص = أ ب

وبالقسمة على أ ب نحصل على

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

وعليه فإن معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات أ وحدة ، ومن محور الصادات ب وحدة هي :

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

مثال (٨ – ١٠) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع وحدتين من المحور السيني الموجب وثلاث وحدات من المحور الصادي السالب .

الحـــل

صورة المعادلة المطلوبة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$. من المعطيات نجد أن : أ = ٢ ، ب = –٣ .

∴ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} = ١$ (وبضرب طرفي المعادلة في ٦) .

٣ س – ٢ ص = ٦ وهي المعادلة المطلوبة .

مثال (٨ – ١١) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٥) ، ويقطع من محور السينات ضعف ما يقطعه من محور الصادات .

الحـــل

نفرض أن ما يقطعه من محور الصادات = أ وحدة .

إذن ما يقطعه من محور السينات = ٢ أ وحدة .

وعليه فإن معادلة المستقيم تأخذ الصورة : $\frac{س}{٢أ} + \frac{ص}{أ} = ١$ ـــــ (١)

http://E-learning-moe.edu.ye

النقطة (٢ ، ٥) واقعة على المستقيم فهي تحقق المعادلة (١) .

$\therefore \frac{٢}{٢أ} + \frac{٥}{أ} = ١$ (بضرب الطرفين في أ) .

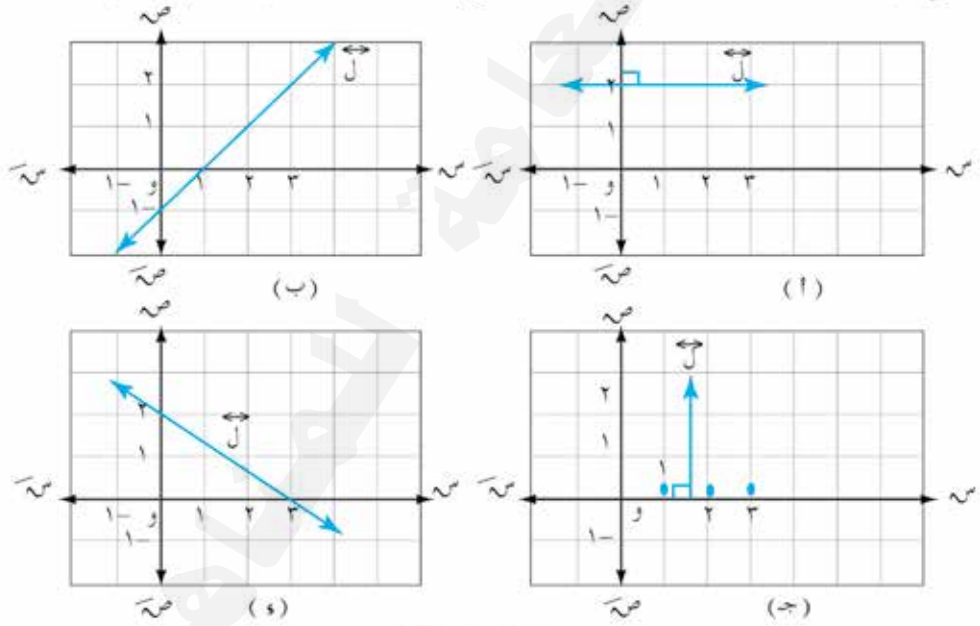
$\therefore ١ + ٥ = أ$ ، ومنه $أ = ٦$ ، وبالتعويض عن $أ = ٦$ في المعادلة (١) نحصل على :

$\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٦} = ١$ (بضرب الطرفين في ١٢) .

$\therefore$ س + ٢ ص − ١٢ = ٠ هي المعادلة المطلوبة .

تمارين ومسائل (٨ : ٣)

[١] في كل من الأشكال التالية ، أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي لكل مستقيم ل ، ثم أوجد معادلته :



شكل (٨ − ١٦)

[٢] أوجد معادلة المستقيم الذي يحقق ما يلي :

أ) ميله ٢ ويمر بالنقطة (−٤ ، −٤) .

ب) ميله $\frac{٧}{٤}$ ويقطع وحدتين من محور الصادات الموجب .

جـ) ميله −١ ويقطع ثلاث وحدات من محور السينات السالب .

د) يمر بالنقطة (٦ ، ١) ويوازي محور السينات .

هـ) يمر بالنقطتين (−٤ ، −٣) ، (١ ، −٣) .

و) يقطع وحدتين من محور السينات السالب ويقطع أربع وحدات من محور الصادات .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٣] لكل من المستقيمات التالية ، أوجد معادلة المستقيم العمودي والمستقيم الموازي له والمارين بالنقطة المعطاة :

أ) ص = س ؛ (−٧ ، ٠) . ب) ٧ س + ٨ ص + ٢٨ = ٠ ؛ (٦ ، −٢) .

جـ) أ س + ب ص + جـ = ٠ ؛ (٠ ، ٥) .

[٤] أوجد الميل والجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات للمستقيمات التالية :

أ) س + ٢ ص = ٦ . ب) ص − ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ٥)

جـ) ١٢ س − ٥ ص − ١٧ = ٠ . د) ٧ س + $\frac{٣}{٢}$ ص = ٤ + جـ .

[٥] أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم ٢ ص − س = ٧ ، وينصف القطعة الواصلة بين النقطتين (٣ ، ١) ، (١ ، −٥) .

[٦] أوجد معادلة المنصف العمودي للقطعة $\overline{أب}$ حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٧ ، ٦) .

[٧] أ ب جـ د مربع فيه أ (١ ، ٣) ، جـ (٦ ، ٨) . أوجد معادلة القطر $\overline{ب د}$.

[٨] أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (−٣ ، ٨)، ومجموع ما يقطعه من محوري الإحداثيات ٧ وحدات .

٨ : ٤ بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

بعد نقطة معلومة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) عن مستقيم معلوم أ س + ب ص + جـ = ٠ معطى بالقانون

ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$.

البرهان : لإيجاد النقطة هـ$_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) التي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

أ س + ب ص + جـ = ٠ والعمودي عليه هـ$_١$ هـ$_٢$

نوجد معادلة العمودي أولاً :

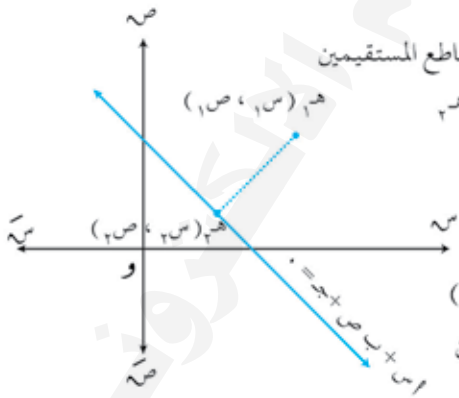
نكتب المعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠

بالصورة :

ص = − $\frac{أ}{ب}$ س − $\frac{جـ}{ب}$ .... (١)

نلاحظ أن المستقيم له ميل يساوي − $\frac{أ}{ب}$ أي أن

م = − $\frac{أ}{ب}$



شكل (٨ − ١٧)

ومن المعلوم أن ميل المستقيم المار بالنقطة هـ$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) وعمودي على المستقيم المعطى هو : $\frac{ب}{أ}$

ومعادلته هي :

ص − ص$_١$ = $\frac{ب}{أ}$ (س − س$_١$) ..... (٢)

http://E-learning-moe.edu.ye

والمستقيمان (١) ، (٢) يتقاطعان في النقطة هـ٢ (س٢ ، ص٢)
وعليه فإنه بحل هاتين المعادلتين بدلالة س٢ ، ص٢ نجد أن :

$$س_{٢} = \frac{ب\,(ب\,س_{١} - أ\,ص_{١}) - أ\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$$

$$ص_{٢} = \frac{أ\,(-ب\,س_{١} + أ\,ص_{١}) - ب\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$$

وعليه فإن المسافة بين هـ١ (س١ ، ص١) ، هـ٢ (س٢ ، ص٢) هي :

$$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

وبالتعويض عن (س٢ ، ص٢) من أعلاه نجد أن :

$$ف = \sqrt{\left(\frac{ب^{٢}\,س_{١} - أ\,ب\,ص_{١} - أ\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}} - س_{١}\right)^{٢} + \left(\frac{-أ\,ب\,س_{١} + أ^{٢}ص_{١} - ب\,جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}} - ص_{١}\right)^{٢}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{أ^{٢}\,(أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ)^{٢} + ب^{٢}(أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ)^{٢}}{(أ^{٢} + ب^{٢})^{٢}}\right]}$$

$$= \frac{|أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$

مثال (٨ - ١٢) أوجد بعد النقطة هـ (-١ ، ٠) عن المستقيم ٢ س + ٣ ص - ٥ = ٠ .

الحـــل

بالتعويض في القانون $ف = \frac{|أ\,س_{١} + ب\,ص_{١} + جـ|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

عن $س_{١} = -١$ ، $ص_{١} = ٠$ ، $أ = ٢$ ، $ب = ٣$ ، $جـ = -٥$ نحصل على :

$$ف = \frac{|٢\,(-١) + ٣ \times ٠ - ٥|}{\sqrt{٢^{٢} + ٣^{٢}}} = \frac{|-٢ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{|-٧|}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \frac{٧}{\sqrt{١٣}} \times \frac{\sqrt{١٣}}{\sqrt{١٣}} = \frac{٧\sqrt{١٣}}{١٣}$$ وحدة طولية .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٨ : ٤)

[١] احسب بعد النقطة هـ عن المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) هـ (١ ، ١) ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠ ب) هـ (٢ ، –١) ، $\overleftrightarrow{ل}$: س – ص + ١ = ٠

جـ) هـ (٣ ، ٤) ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ص – ٢ = ٠ د) هـ (–٣ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠

هـ) هـ (٠ ، ٠) ، $\overleftrightarrow{ل}$: ٨ س + ٦ ص – ١ = ٠ .

[٢] أوجد طول العمود النازل من كل نقطة من النقاط (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (–٢ ، ٢) ، (١ ، ٣) على المستقيم ٣ ص = ٤ س + ٥ .

[٣] إذا كانت النقاط أ (–١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) ، جـ (٠ ، ٢) تمثل رؤوس مثلث . احسب ارتفاعاته.

[٤] أوجد مساحة :

أ) المثلث الذي رؤوسه النقاط (٤ ، ٤) ، (٨ ، –١٢) ، (١٢ ، ١٠) .

ب) متوازي الأضلاع الذي رؤوسه النقاط (٥ ، –٤) ، (–١ ، ٤) ، (–١١ ، ١٦) ، (–٥ ، ٨) .

جـ) شبه المنحرف الذي رؤوسه النقاط (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (–٢ ، ٣) ، (٣ ، –٢) .

[٥] أوجد المسافة العمودية بين المستقيمين المتوازيين التاليين :

س + ٢ ص + ١٠ = ٠

س + ٢ ص + ٤ = ٠ .

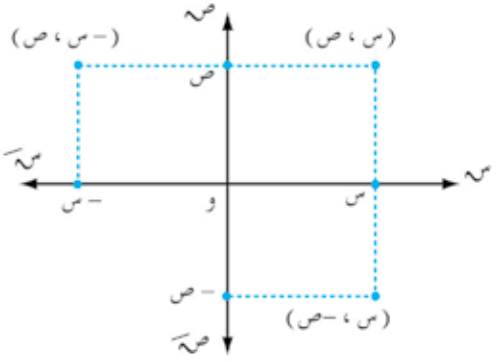
http://E-learning-moe.edu.ye

٨ : ٥ الانعكاس تحليلياً

سبق أن درست الانعكاس والانسحاب والدوران وكلها عبارة عن تحويلات هندسية حيث أن التحويل الهندسي تطبيق تقابل مجاله ومجاله المقابل مجموعة نقاط المستوى ، وفي هذه الوحدة نتناول الانعكاس والانسحاب تحليلياً.

تذكر أن :

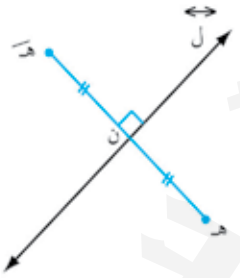
- صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، – ص) وبالانعكاس في محور الصادات هي النقطة (– س ، ص) . انظر [الشكل (٨ – ١٨)] .
- الانعكاس في المحور يحفظ الأطوال وقياس الزوايا .
- هَ صورة هـ بالإنعكاس في المستقيم ل إذا كان :



شكل (٨ – ١٨)

١) هـ هَ ⊥ ل

٢) | هـ ن | = | ن هَ | . حيث أن ن هي نقطة تقاطع هـ هَ مع ل انظر [شكل (٨–١٩)].

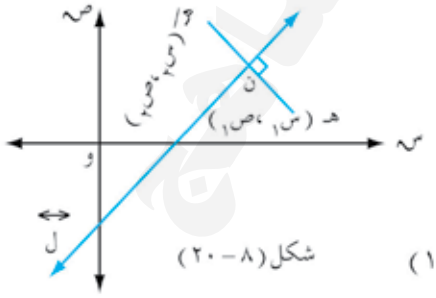


شكل (٨ – ١٩)

وعند معالجة الانعكاس تحليلياً . نفرض أن محور الانعكاس هو المستقيم ل الذي معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠ والمطلوب إيجاد صورة هـ (س١ ، ص١) بالانعكاس في ل ، ولتكن هَ (س٢ ، ص٢) .

أولاً – نوجد إحداثي منتصف القطعة المستقيمة هـ هَ ، وهي : ن $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$.

ثانياً – النقطة ن تحقق معادلة المستقيم ل (محور الانعكاس) لأنها واقعة عليه [شكل (٨–٢٠)]



شكل (٨ – ٢٠)

وبالتعويض فيها نحصل على :

$أ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \right) + ب \left(\frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) + جـ = ٠$

أي: أ س١ + أ س٢ + ب ص١ + ب ص٢ + ٢ جـ = ٠ .

أو أ س٢ + ب ص٢ = – أ س١ – ب ص١ – ٢ جـ ـــــ (١)

ثالثاً – بما أن : هـ هَ ومحور الانعكاس متعامدان ، إذن حاصل ضرب ميليهما يساوي – ١ .

∵ ميل محور الانعكاس ل = $- \frac{أ}{ب}$ ، ميل هـ هَ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$.

∴ $\left(\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \right) \left(\frac{أ}{ب} \right) = ١$.

http://E-learning-moe.edu.ye

أي أ ص$_{٢}$ − أ ص$_{١}$ = ب س$_{٢}$ − ب س$_{١}$.

أو أ ص$_{٢}$ − ب س$_{٢}$ = أ ص$_{١}$ − ب س$_{١}$ ـــــ (٢)

رابعاً : نحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً ، وذلك بضرب المعادلة (١) في أ ، والمعادلة (٢) في − ب وجمعهما

نحصل على : $س_{٢} = \frac{(ب^{٢} - أ^{٢}) س_{١} - ٢أب ص_{١} - ٢أجـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$.

وبضرب المعادلة (١) في ب والمعادلة (٢) في أ وجمعها نحصل على :

$ص_{٢} = \frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) ص_{١} - ٢أب س_{١} - ٢ب جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$.

وعليه فإن :

هـ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) هي صورة النقطة هـ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بالانعكاس في المستقيم ل : أ س + ب ص + جـ = ٠

حيث إن $س_{٢} = \frac{(ب^{٢} - أ^{٢}) س_{١} - ٢أب ص_{١} - ٢أجـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

$ص_{٢} = \frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) ص_{١} - ٢أب س_{١} - ٢ب جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

ويمكن إيجاد إحداثي النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بدلالة إحداثي صورتها (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) باستبدال ص$_{٢}$ بـ ص$_{١}$ س$_{٢}$ بـ س$_{١}$ في القانونين أعلاه ، أي :

$س_{١} = \frac{(ب^{٢} - أ^{٢}) س_{٢} - ٢أب ص_{٢} - ٢أجـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

$ص_{١} = \frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) ص_{٢} - ٢أب س_{٢} - ٢ب جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

مثال (٨ − ١٣) أوجد صورة النقطة هـ (٣ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم س − ص = ١ .

الحـــل

بالتعويض في القانون $س_{٢} = \frac{(ب^{٢} - أ^{٢}) س_{١} - ٢أب ص_{١} - ٢أجـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

$ص_{٢} = \frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) ص_{١} - ٢أب س_{١} - ٢ب جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

عن أ = ١ ، ب = −١ ، جـ = −١ ، س$_{١}$ = ٣ ، ص$_{١}$ = ٤ نحصل على :

$س_{٢} = \frac{(١ - ١)(٣)(٢) - (١)(-١)(٤) - (٢)(١)(-١)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٨ + ٢}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$.

$ص_{٢} = \frac{(١ - ١)(٤)(٢) - (١)(-١)(٣) - (٢)(-١)(-١)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٦ - ٢}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$.

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ صورة النقطة (٣ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم س – ص = ١ هي النقطة (٥ ، ٢) .

مثال (٨ – ١٤) أوجد إحداثي النقطة التي صورتها النقطة (٢ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

الحـــل

بالتعويض في القانون $س_{١} = \frac{(ب^{٢} - أ^{٢}) س_{١} - ٢ أ ب ص_{١} - ٢ أ جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

$ص_{١} = \frac{(أ^{٢} - ب^{٢}) ص_{١} - ٢ أ ب س_{١} - ٢ ب جـ}{أ^{٢} + ب^{٢}}$

عن أ = ١ ، ب = –١ ، جـ = ٠ ، $س_{١}$ = ٢ ، $ص_{١}$ = ٤ نحصل على :

$س_{١} = \frac{(١ - ١)(٢) - (٢)(١)(-١) - (٤)(١)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٨ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$.

$ص_{١} = \frac{(١ - ١)(٤) - (٢)(١)(-١) - (٢)(٢)(٠)}{١ + ١} = \frac{\text{صفر} + ٤ - \text{صفر}}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$.

∴ النقطة (٤ ، ٢) هي النقطة التي صورتها (٢ ، ٤) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

مثال (٨ – ١٥) أوجد صورة المستقيم س – ص = ١ بالانعكاس في المستقيم ٣ س – ص – ٥ = ٠ .

الحـــل

بما أن المستقيم يتحدد بنقطتين واقعتين عليه ، فإننا نختار أي نقطتين على المستقيم س – ص = ١ مثل (٠ ، –١) ، (١ ، ٠) (بوضع س = ٠ ، ص = ٠ على التوالي) ، ومن ثم نوجد صورتيهما بالانعكاس في المستقيم ٣س –ص – ٥ = ٠ فإن. صورة النقطة (٠ ، –١) هي النقطة :

$\left(\frac{(١ - ٩)(٠)(٢)(٣)(-١) - (-١)(-١) - (٢)(٣)(-٥)}{٩ + ١} ، \frac{(-٩ - ١)(-١) - (٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(-١)(-٥)}{٩ + ١} \right)$

$= \left(\frac{\text{صفر} - ٦ + ٣٠}{١٠} ، \frac{-٨ - \text{صفر} - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٤}{١٠} ، \frac{-١٨}{١٠} \right) = \left(\frac{١٢}{٥} ، -\frac{٩}{٥} \right)$.

وصورة النقطة (١ ، ٠) هي النقطة :

$\left(\frac{(١ - ٩)(١)(٢)(٣)(-١)(٠) - (٢)(٣)(-٥)}{٩ + ١} ، \frac{(-٩ - ١)(٠) - (٢)(٣)(-١)(١) - (٢)(-١)(-٥)}{٩ + ١} \right)$

$= \left(\frac{-٨ - \text{صفر} + ٣٠}{١٠} ، \frac{\text{صفر} + ٦ - ١٠}{١٠} \right) = \left(\frac{٢٢}{١٠} ، \frac{-٤}{١٠} \right) = \left(\frac{١١}{٥} ، \frac{-٢}{٥} \right)$.

وتكون معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين ($\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{-٩}{٥}$) ، ($\frac{١١}{٥}$ ، $\frac{-٢}{٥}$) هي :

http://E-learning-moe.edu.ye

$$\because \quad \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \qquad \therefore \quad \frac{\text{ص} - \left(\frac{-9}{5}\right)}{\text{س} - \frac{12}{5}} = \frac{\frac{-2}{5} - \left(\frac{-9}{5}\right)}{\frac{11}{5} - \frac{12}{5}}$$

أي أن : $\frac{5\text{ص} + 9}{5\text{س} - 12} = \frac{-2 + 9}{11 - 12} = \frac{7}{-1}$

$7(5\text{س} - 12) = -5\text{ص} - 9$.

$35\text{س} - 84 + 5\text{ص} + 9 = 0 \quad \Leftarrow \quad 35\text{س} - 75 + 5\text{ص} = 0$

$7\text{س} + \text{ص} - 15 = 0$

وهي معادلة صورة المستقيم $\text{س} - \text{ص} = 1$ بالانعكاس في المستقيم $3\text{س} - \text{ص} - 5 = 0$.

مثال (٨ - ١٦) أوجد معادلة محور الانعكاس إذا علمت أن صورة النقطة هـ(٢ ، ١) هي النقطة هـَ(١ ، ٢) .

الحل

بما أن محور الانعكاس ينصف القطعة $\overline{\text{هـ هـَ}}$ ، وعمودياً عليها .

إذن إحداثي منتصف القطعة $\overline{\text{هـ هـَ}}$ هو $\left(\frac{3}{2} ، \frac{3}{2}\right)$ ، وميل محور الانعكاس يساوي سالب مقلوب ميل:

$-1 \times \frac{1}{\text{م}(\overline{\text{هـ هـَ}})} = -\frac{1 - 2}{2 - 1} = -\frac{-1}{1} = 1$.

وعليه فإن معادلة محور الانعكاس هي : $\left(\text{ص} - \frac{3}{2}\right) = 1\left(\text{س} - \frac{3}{2}\right)$ أو $\text{ص} - \text{س} = 0$.

تمارين ومسائل (٨ : ٥)

[١] أوجد صورة كل نقطة من النقاط :

أ) (١ ، ٣) ، ب) (-٢ ، ٣) ، جـ) (٥ ، -٢) ، د) (-١ ، -٣) .

بالانعكاس في المستقيم $\text{س} + 2\text{ص} - 1 = 0$.

[٢] ما هي النقاط التي صورها بالانعكاس في المستقيم $\text{ص} = 1$ هي :

أ) (٢ ، ٣) ، ب) (١ ، -٢) ، جـ) (-٢ ، -١) ، د) (٠ ، ٥) .

[٣] أوجد صورة كل مستقيم من المستقيمات :

أ) $\text{س} = 0$ ، ب) $\text{س} = \text{ص}$ ، جـ) $\text{س} - \text{ص} - 1 = 0$ ،

د) $3\text{س} + \text{ص} - 6 = 0$

بالانعكاس في المستقيم $\text{س} + 2\text{ص} - 3 = 0$

[٤] بيَّن جبرياً أن صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، -ص) .

[٥] ما هو المستقيم الذي صورته $2\text{س} + \text{ص} - 1 = 0$ بالانعكاس في المستقيم $\text{س} + 2\text{ص} - 3 = 0$.

http://E-learning-moe.edu.ye

[٦] أوجد معادلة محور الانعكاس لكل نقطة وصورتها في كل حالة من الحالات التالية :

أ) هـ(١ ، ١) ، هـَ(٣ ، ١) . ب) هـ(٠ ، −١) ، هـَ(٢ ، ١) .

جـ) هـ(−١ ، ١) ، هـَ(٣ ، −١) .

[٧] أثبت أنّ صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة (ص ، س) ، ومن ثم أوجد صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س .

[٨] أثبت أن صورة النقطة (س، ص) بالانعكاس في المستقيم ص = −س هي النقطة (− ص ، − س) .

[٩] ما هي صورة المستقيم ٢ س + ص − ٢ = ٠ بالانعكاس في المستقيم .

أ) س = ٠ ب) ص = ٠

جـ) س = ٢ ء) ص = −٣

هـ) ص = س و) ص = − س ز) ص + ٢ س = ١ .

[١٠] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (٣ ، −٢) ، (−١ ، ٠) ، (١ ، ٥) بالانعكاس في المستقيم: ص + ٢ س + ١ = ٠ .

[١١] أوجد صورة المستطيل الذي رؤوسه النقاط (−٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (−١ ، ٠) بالانعكاس في المستقيم ص + س −١ = ٠ .

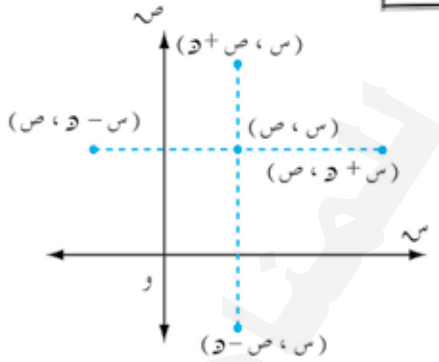
٦ : ٨ الانسحاب تحليلياً

تذكر أن :

- صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور السينات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ± د ، ص) ، وباتجاه محور الصادات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س ، ص ± د) وتكون إشارة د بحسب اتجاه حركة الانسحاب في الاتجاه الموجب أو السالب لأيّ من المحورين [شكل (٨ − ٢١)].
- الانسحاب يحافظ على الاطوال وقياس الزوايا .
- هـَ صورة النقطة هـ بانسحاب مقداره د وحدة طولية اتجاهه $\overleftarrow{أب}$ إذا كان :

١) $\overleftarrow{هـهـَ}$ // $\overleftarrow{أب}$.

٢) | هـهـَ | = د [انظر شكل (٨−٢٢)] .



شكل (٨ − ٢١)

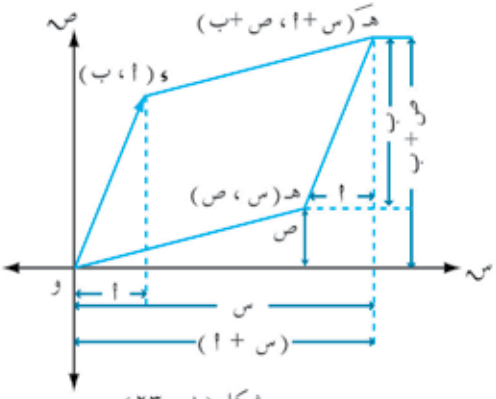


شكل (٨ − ٢٢)

وفي هذ البند سنعالج الانسحاب تحليلياً .

لنفرض أن هـ(س ،ص)نقطة في مستوى الإحداثيات، والمطلوب إيجاد صورة هـ بإنسحاب في اتجاه $\overleftarrow{وء}$ (أي من و إلى ء) وبمقدار | وء | [انظر شكل (٨−٢٣)].

http://E-learning-moe.edu.ye



شكل (٨ – ٢٣)

إذا أخذنا و نقطة الأصل ، فإنه يمكن تمثيل $\overleftarrow{و\,ع}$ بالنقطة (ا ، ب) ، أي أن الانسحاب باتجاه $\overleftarrow{و\,ع}$ وبمقدار $|\,و\,ع\,|$ هو عبارة عن انسحابين أحدهما باتجاه محور السينات بمقدار ا وحدة طولية والآخر باتجاه محور الصادات بمقدار ب وحدة طولية [شكل (٨–٢٤)]، وبالتالي فإن صورة النقطة هـ (س ، ص) هي النقطة هـَ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) حيث س$_{١}$ = س + ا ، ص$_{١}$ = ص + ب

وعليه فإن :

صورة هـ (س ، ص) بانسحاب (ا ، ب) هي هـَ (س + ا ، ص + ب) .

والنقطة هـ بدلالة صورتها هـَ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) بانسحاب (ا ، ب) هي :

هـ (س$_{١}$ – ا ، ص$_{١}$ – ب) .

مثال (٨ – ١٧) أوجد صورة النقطة (٣ ، ٤) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن صورة النقطة (٣ ، ٤) هي النقطة هـَ (٣ + ٢ ، ٤ + ١) = (٥ ، ٥) .

مثال (٨ – ١٨) أوجد النقطة التي صورتها (٧ ، –١) بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

باستخدام القانون أعلاه فإن النقطة التي صورتها (٧ ، –١) هي (٧ – ٢ ، –١ – ١) = (٥ ، –٢) .

مثال (٨ – ١٩) أوجد صورة المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

الحل

لنأخذ أي نقطتين واقعتين على المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ ولتكن (١ ، ٢) ، (٥ ، ٠) وبالتالي فإن صورتيهما واقعتان على صورة المستقيم المعطى س + ٢ ص – ٥ = ٠ .

بما أن صورة (١ ، ٢) بانسحاب (٢ ، ١) هي (٣ ، ٣) ، وصورة (٥ ، ٠) بانسحاب (٢ ، ١) هي (٧ ، ١) .

إذن معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين (٣ ، ٣) ، (٧ ، ١) هي :

$$\frac{ص - ٣}{س - ٣} = \frac{١ - ٣}{٧ - ٣} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

http://E-learning-moe.edu.ye

أي أن ٢ (ص – ٣) = –١ (س – ٣)

٢ ص – ٦ = – س + ٣

أو س + ٢ ص – ٩ = ٠

وهي معادلة صورة المستقيم س + ٢ ص – ٥ = ٠ بانسحاب (٢ ، ١) .

مثال (٨ – ٢٠) أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ(١ ، ٢) هي النقطة هَ (–٢ ، ٥) .

الحل ليكن الانسحاب (أ ، ب) إذن (–٢ ، ٥) = (١ + أ ، ٢ + ب) . ومنه ينتج أن:

–٢ = ١ + أ ⇐ أ = –٣

٥ = ٢ + ب ⇐ ب = ٣

وعليه فإن الانسحاب هو (–٣ ، ٣) .

تمارين ومسائل (٨ : ٦)

[١] أوجد صورة كلّ من النقاط التالية بانسحاب (١ ، ٢) :

أ) (٥ ، –١) ب) (–١ ، ١) . جـ) (٠ ، ٢) ء) (–٣ ، –٤) .

[٢] أوجد النقاط التي صورها بانسحاب (٣ ، –١) هي :

أ) (٥ ، ٥) . ب) (–١ ، ٧) . جـ) (٥ ، –١) . ء) (–٢ ، –٣) .

[٣] أوجد الانسحاب إذا علمت أن صورة النقطة هـ هي هَ في الحالات التالية :

أ) هـ (٢ ، ٣) ، هَ (٤ ، ١) . ب) هـ (–١ ، ١) ، هَ (١ ، ٣) .

جـ) هـ (–٢ ، –١) ، هَ (٣ ، –١) . ء) هـ (–١ ، ٣) ، هَ (–١ ، –١) .

[٤] أوجد صورة كلّ من المستقيمات التالية بانسحاب (–١ ، ٢) :

أ) س = ٠ . ب) ص = ٠ . جـ) س = أ .

ء) ص = ب . هـ) ص = س . و) ص = – س .

ز) ٢ س + ٣ ص – ٢ = ٠ .

[٥] أوجد المستقيمات التي صورها بانسحاب (–٢ ، –٣) هي :

أ) ص – ٢ س – ٢ = ٠ . ب) ص = س .

جـ) ص – س = ٢ . ء) ٢ ص = س + ٢ .

[٦] أوجد صورة المثلث الذي رؤوسه النقاط (١ ، ٣) ، (٧ ، ٥) ، (٢ ، ٠) بانسحاب (٣ ، –٢) .

[٧] إذا كانت صورة النقطة (٦ ، ٢) هي النقطة (٢ ، ٧) ، وصورة النقطة (–١ ، ٥) هي هَ بالانسحاب. أوجد الانسحاب وإحداثي النقطة هَ .

[٨] إذا كانت صورة النقطة (٩ ، ١) هي النقطة (٢ ، –٣) ، وصورة النقطة هـ هي (–٥ ، ٦) بالانسحاب. أوجد الانسحاب وإحداثي النقطة هـ .

http://E-learning-moe.edu.ye

المتجهات

٩ : ١ المتجهات

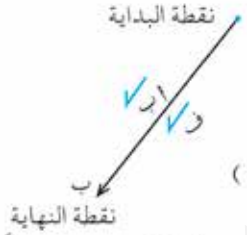
سبق وأن درست بعض الكميات الفيزيائية منها : الكتلة – درجة الحرارة – الإزاحة – السرعة – العجلة – القوة ، نجد أن بعض الكميات مثل الكتلة ودرجة الحرارة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها العددي فقط، وهذه الكميات تسمى كميات عددية بينما بعض الكميات، مثل الإزاحة، والسرعة، والعجلة، والقوة تتعين تعييناً تاماً بذكر مقدارها واتجاهها ومثل هذه الكميات تسمى كميات متجهة، أو تسمى متجهات .

تعريف (٩ : ١)

المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه .

ويرمز للمتجة بالرمز $\overleftarrow{ف}$ أو $\overleftarrow{س}$ ونمثله هندسياً بقطعة مستقيمة لها نقطة بداية ولتكن ا ونقطة نهاية ولتكن ب فنكون قد حدّدنا اتجاهاً للقطعة المستقيمة ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{أب}$ (يدل السهم على الاتجاه) .

[شكل (٩ – ١)] .



شكل (٩–١)

فيكون طول القطعة المستقيمة ممثلاً لمقدار المتجه $\overleftarrow{ف}$ واتجاه القطعة المستقيمة ممثلاً لاتجاه المتجه $\overleftarrow{ف}$.

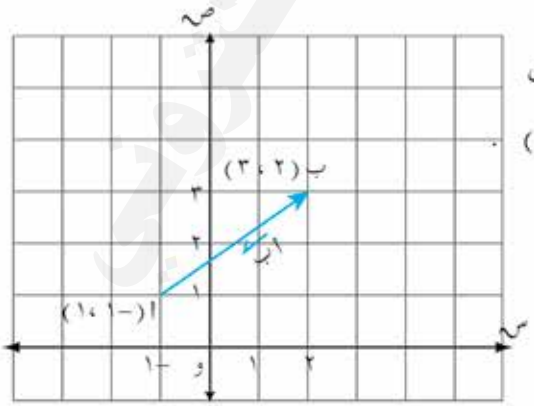
وقد تعرفنا في الهندسة التحليلية كيف نرسم قطعة مستقيمة في المستوى والآن سنعرف كيف نرسم متجهاً معلوماً نقطتا بدايته ونهايته في مستوى الإحداثيات .

مثال (٩ – ١) ارسم المتجه $\overleftarrow{أب}$ في المستوى الإحداثي حيث ا (–١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣)

الحل

١– نمثل النقطتين ا ، ب في المستوى .

٢ – نرسم سهماً بدايته النقطة ا ونهايته النقطة ب [شكل (٩ – ٢)] .



شكل (٩–٢)

http://E-learning-moe.edu.ye

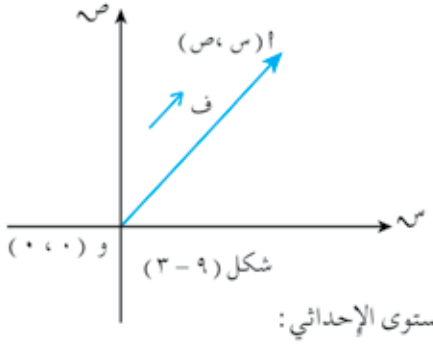
المتجه القياسي :

المتجه $\overrightarrow{و\,أ}$ ممثل $\overrightarrow{ف}$ كما في [الشكل (٩ – ٣)] يسمى بالمتجه القياسي (متجه الموضع) .

تعريف (٩ : ٢)

المتجه القياسي هو متجه مرسوم في المستوى الإحداثي بحيث تكون بدايته مبدأ تقاطع الإحداثيات و (٠ ، ٠) ونهايته أي نقطة أ (س ، ص) في المستوى ويمثله الزوج المرتب (س ، ص) .

ويكتب المتجه القياسي بدلالة النقطة أ (س ، ص) كما في الشكل (٩–٣) .



شكل (٩ – ٣)

مثال (٩ – ٢) ارسم المتجهات القياسية التالية في المستوى الإحداثي :

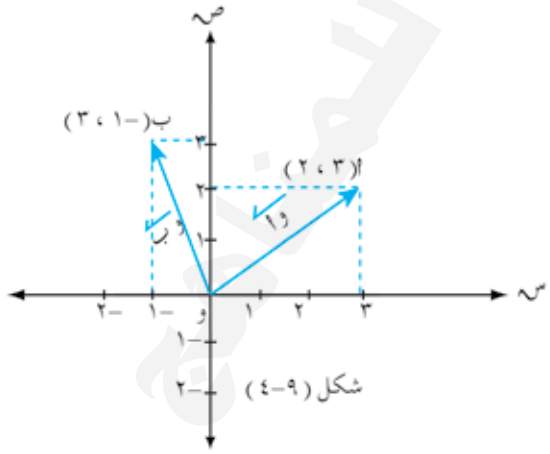
١) $\overrightarrow{و\,أ}$ = (٣ ، ٢) .

٢) $\overrightarrow{و\,ب}$ = (–١ ، ٣) .

الحل

١ – نمثل النقطة أ (٣ ، ٢) في المستوى الإحداثي ، ثم نرسم سهماً بدايته و (٠ ، ٠) ونهايته النقطة أ (٣ ، ٢) .

٢ – لتمثيل $\overrightarrow{و\,ب}$ نتبع الخطوات السابقة نفسها [شكل (٩ – ٤)] .



شكل (٩–٤)

تكافؤ القطع الموجهة :

تعريف (٩ : ٣)

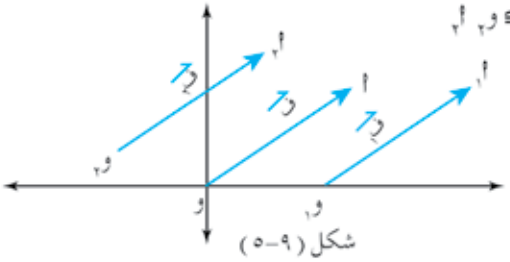
تكون القطعتان الموجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه بمعنى أن لهما متجه الموضع نفسه .

http://E-learning-moe.edu.ye

من الشكل (٩-٤) المتجه $\overrightarrow{و_١ ا_١}$ يكافئ المتجه $\overrightarrow{و_٢ ا_٢}$ لان لهما نفس متجه الموضع $\overrightarrow{ف}$

ونقول أن المتجهات المذكورة متساوية (متكافئة)

ونكتب رمزياً : $\overrightarrow{ف} \cong \overrightarrow{و ا} \cong \overrightarrow{ف_١} \cong \overrightarrow{و_١ ا_١} \cong \overrightarrow{ف_٢} \cong \overrightarrow{و_٢ ا_٢}$



شكل (٩-٥)

تساوي المتجهات :

ليكن $\overrightarrow{ف_١}$ = (س١ ، ص١) ، $\overrightarrow{ف_٢}$ = (س٢ ، ص٢) متجهان في المستوى الإحداثي

فإن : $\overrightarrow{ف_١} = \overrightarrow{ف_٢} \Leftrightarrow$ س١ = س٢ ، ص١ = ص٢ .

جمع المتجهات وطرحها :

ليكن $\overrightarrow{ف_١}$ = (س١ ، ص١) ، $\overrightarrow{ف_٢}$ = (س٢ ، ص٢) متجهان في المستوى الأحداثي

فإن : $\overrightarrow{ف_١} \pm \overrightarrow{ف_٢}$ = (س١ ، ص١) ± (ص٢ ، ص٢) .

= (س١ ± س٢ ، ص١ ± ص٢) .

ضرب متجهة في عدد حقيقي (عدد قياسي) :

ليكن $\overrightarrow{ف}$ = (س ، ص) ، ك عدد حقيقي

فإن : (ك $\overrightarrow{ف}$) = (ك س ، ك ص) .

خواص ضرب متجه بعدد حقيقي :

١) ك ($\overrightarrow{ف_١}$ + $\overrightarrow{ف_٢}$) = ك $\overrightarrow{ف_١}$ + ك $\overrightarrow{ف_٢}$.

٢) (ك١ + ك٢) $\overrightarrow{ف}$ = ك١ $\overrightarrow{ف}$ + ك٢ $\overrightarrow{ف}$.

٣) ك١ (ك٢ $\overrightarrow{ف}$) = (ك١ ك٢) . $\overrightarrow{ف}$.

مثال (٩ - ٣) أوجد ناتج ما يلي :

١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) . ٢) (٢ ، ٧) - (- ٥ ، ٦) . ٣) ٧ X (٢ ، -٣) .

الحـــل

١) (٥ ، ٤) + (٣ ، ٢) = (٥ + ٣ ، ٤ + ٢) = (٨ ، ٦) .

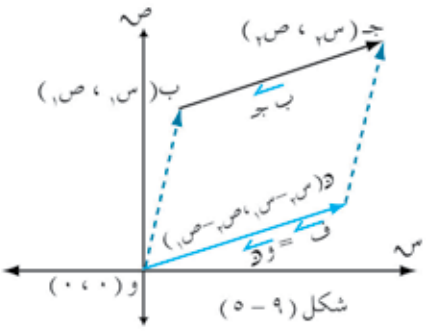
٢) (٢ ، ٧) - (- ٥ ، ٦) = (٢ - (-٥) ، ٧ - ٦) = (٢ + ٥ ، ١) = (٧ ، ١) .

٣) ٧ X (٢ ، -٣) = (٧ X ٢ ، ٧ X -٣) = (١٤ ، -٢١) .

http://E-learning-moe.edu.ye

تمثيل متجه ب جـ بمتجه قياسي .

إذا كان ب جـ متجهاً في المستوى الإحداثي
حيث ب (س١ ، ص١) ، جـ (س٢ ، ص٢) فإن :
المتجه القياسي لهذا المتجه ب جـ هو المتجه القياسي و د
يمثل بالزوج المرتب (س٢ − س١ ، ص٢ − ص١)
انظر الشكل (٩−٥) .



شكل (٩ − ٥)

فيكون :

$$\overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{و د} = (س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١) .$$

ويمكن كتابة ذلك بالشكل $\overrightarrow{ب جـ} = (س_٢ ، ص_٢) - (س_١ ، ص_١) \Leftarrow$ $\overrightarrow{ب جـ} = جـ - ب$.

مثال (٩ − ٤) إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ٤) ، جـ (−١ ، ٢) ثلاث نقاط في المستوى .
فأوجد :

١) $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب أ}$ ، وماذا نستنتج ؟ ٢) $\overrightarrow{ب جـ}$. ٣) $\overrightarrow{و ب}$.

الحـــل

١) $\overrightarrow{أ ب} = ب - أ = (٥ ، ٤) - (٢ ، ٣) = (٥ − ٢ ، ٤ − ٣) \Leftarrow \overrightarrow{أ ب} = (٣ ، ١)$.
$\overrightarrow{ب أ} = أ - ب = (٢ ، ٣) - (٥ ، ٤) = (٢ − ٥ ، ٣ − ٤) \Leftarrow \overrightarrow{ب أ} = (−٣ ، −١)$.
نستنتج أن : $\overrightarrow{أ ب} \neq \overrightarrow{ب أ}$ ويُسميا متجهين متعاكسين .

٢) $\overrightarrow{ب جـ} = جـ - ب = (−١ − ٥ ، ٢ − ٤) = (−٦ ، −٢)$.

٣) ∵ $\overrightarrow{و ب}$ متجه قياسي $\Leftarrow$ $\overrightarrow{و ب} = (٥ ، ٤)$.

لاحظ أنه : كل متجه $\overrightarrow{ب جـ}$ في المستوى يُمثل بمتجه قياسي وحيد $\overrightarrow{و د} = (س ، ص)$ ، وبالتالي نقول أنه كل متجه قياسي $\overrightarrow{و د} = (س ، ص)$ في مستوى الإحداثيات يقابل زوجا مرتبا وحيداً من الأعداد الحقيقية هو د (س ، ص) والعكس صحيح فكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية د (س ، ص) يحدّد متجهاً قياسياً وحيداً $\overrightarrow{و د}$ حيث د (س ، ص) .

تطابق متجهين :

تعرف أن شرط تطابق (تساوي) متجهين $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{ء هـ}$ ، وهو عندما يكونا متوازيين ومن اتجاه واحد ولهما نفس الطول ، وبشكل مكافئ .

$$\overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{ء هـ} \Leftrightarrow جـ - ب = هـ - ء .$$

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٩ - ٥)

إذا كانت ب (٢ ، -١) ، أ (س ، ص) . فأوجد إحداثي النقطة أ ليكون $\overleftarrow{أب}$ = (٧ ، ٥) .

الحـــل

∵ $\overleftarrow{أب}$ = ب - أ ⇐ (٧ ، ٥) = (٢ ، -١) - (س ، ص) ⇐ (٧ ، ٥) = (٢ - س ، -١ - ص)

⇐ ٧ = ٢ - س ، ٥ = -١ - ص

⇐ س = -٥ ، ص = -٦ ⇐ أ (-٥ ، -٦) .

طول المتجه وميله :

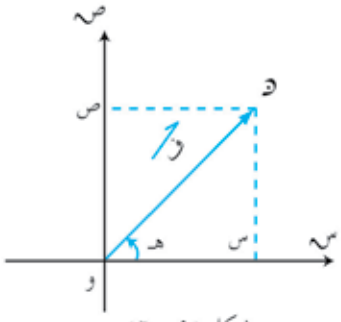
تعريف (٩ : ٤)

لكل متجه $\overleftarrow{ف}$ = (س ، ص) طولاً يرمز له $|\overleftarrow{ف}|$ ويعطى بالعلاقة :

$|\overleftarrow{ف}| = |\overleftarrow{و د}| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$.

وميله يعطى بالعلاقة :

ميل $\overleftarrow{و د}$ = ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ، حيث هـ هي قياس الزاوية التي يصنعها المتجه مع محور السينات الموجب .



شكل (٩ - ٦)

مثال (٩ - ٦)

أوجد طول ، وميل المتجه $\overleftarrow{ف}$ = (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

الحـــل $|\overleftarrow{ف}| = \sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$.

وميل المتجه $\overleftarrow{ف}$ = ظاهـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$.

مثال (٩ - ٧) لتكن أ (٠ ، ٧) ، ب (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٩) فأوجد

١) طول المتجه $\overleftarrow{أب}$. ٢) ميل المتجه $\overleftarrow{أب}$.

٣) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحـــل

أولاً نوجد : $\overleftarrow{أب}$ = ب - أ ⇐ $\overleftarrow{أب}$ = (٢ $\sqrt{٣}$ - ٠ ، ٩ - ٧) ⇐ $\overleftarrow{أب}$ = (٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢)

⇐ س = ٢ $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ .

http://E-learning-moe.edu.ye

١) $|\overleftarrow{أب}| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ⇐ $|\overleftarrow{أب}| = \sqrt{(٢\sqrt{٣})^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{١٢ + ٤} = \sqrt{١٦} = ٤$

٢) ميل المتجه $\overleftarrow{أب} = \frac{ص}{س} = \frac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$.

٣) ∵ ظاهـ $= \frac{ص}{س}$ ⇐ ظاهـ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⇐ هـ $= ٣٠^{\circ}$.

مثال (٩ - ٨) إذا كانت ب $(-٣ ، ٤)$ ، جـ $(-٢ ، ك)$ ، فأوجد قيمة ك التي تجعل $\overleftarrow{ب جـ}$ يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع المحور السيني الموجب .

الحـــل

نوجد $\overleftarrow{ب جـ} = جـ - ب$ ⇐ $\overleftarrow{ب جـ} = (-٢ - (-٣) ، ك - ٤) = (-٢ + ٣ ، ك - ٤)$

⇐ $\overleftarrow{ب جـ} = (١ ، ك - ٤)$ ⇐ س $= ١$ ، ص $= ك - ٤$ ، هـ $= ١٣٥^{\circ}$.

∵ ظاهـ $= \frac{ص}{س}$ ⇐ ظا $١٣٥^{\circ} = \frac{ك - ٤}{١}$.

⇐ ظا $(\pi - ٤٥^{\circ}) = ك - ٤$ ⇐ $-$ ظا $٤٥^{\circ} = ك - ٤$ ⇐ $-١ = ك - ٤$ ⇐ $ك = ٣$.

مثال (٩ - ٩) إذا كان جـ $(١ ، ١)$ ، ء $(-٢ ، ٣)$ ، فأوجد $|\overleftarrow{جـ ء}|$ ، $|\overleftarrow{ء جـ}|$ ، ماذا تلاحظ؟

الحـــل

$\overleftarrow{جـ ء} = ء - جـ = (-٣ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ء جـ} = جـ - ء = (٣ ، -٢)$

⇐ $|\overleftarrow{جـ ء}| = \sqrt{(-٣)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ ،

$|\overleftarrow{ء جـ}| = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$.

نستنتج أن $|\overleftarrow{جـ ء}| = |\overleftarrow{ء جـ}|$.

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (٩ : ١)

[١] أكمل ما يأتي : أ) المتجه وممثله لهما نفس ..... ، ..... .

ب) المتجهان $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب أ}$ متساويان في ..... ومتعاكسان في ..... .

جـ) نقول أن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـ ء}$ إذا وفقط إذا كان ب – أ = ...

ء) إذا كان $\overrightarrow{ف} = (٢ ، ١)$ فإن $|\overrightarrow{ف}| =$ .... وميل $\overrightarrow{ف} =$ .....

هـ) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = (٢ ك ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = (١٢ ، ٣)$ ، فإن قيمة ك التي تجعل $\overrightarrow{ف_١} = \overrightarrow{ف_٢}$ تساوي ..... .

[٢] ارسم المتجهات التالية في المستوى الإحداثي :

أ) $\overrightarrow{أب}$ حيث أ (٧ ، ٠) ، ب (–٢ ، ٥) . ب) $\overrightarrow{و د} = (–٣ ، ٧)$.

جـ) $\overrightarrow{ف} = (٤ ، ٠)$.

[٣] إذا كانت أ (٢ ، ٧) ، ب (٤ ، ٩) ، جـ (١ ، ٣) ، ء (–١ ، ١) اربع نقاط في المستوى الإحداثي والمطلوب :

أ) أوجد $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{ء ب}$ ، ثم أوجد أطوالها .

ب) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أب}$ مع المحور س الموجب ، وكذلك أوجد ميله .

جـ) أثبت أن $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ء جـ}$.

[٤] إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ك) ، فأوجد قيم ك في جميع الحالات الآتية :

أ) $\overrightarrow{أب} = (٣ ، ١٥)$. ب) $|\overrightarrow{أب}| = ٥$.

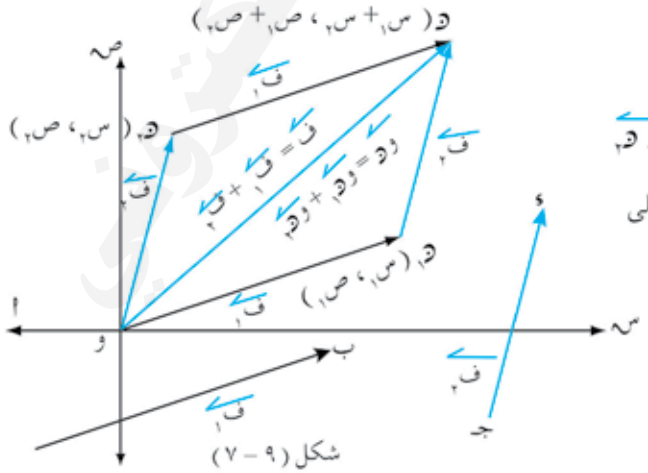
جـ) ميل $\overrightarrow{أب} = \frac{١}{٣}$. ء) قياس زاوية $\overrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني ٤٥° .

٩ : ٢ تمثيل العمليات على المتجهات هندسياً

أولاً – جمع المتجهات هندسياً :

في [الشكل (٩ – ٧)] $\overrightarrow{و د_١}$ ، $\overrightarrow{و د_٢}$ متجهان ممثلان للمتجهين $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ على الترتيب فإن :

$\overrightarrow{و د_١} + \overrightarrow{و د_٢} = \overrightarrow{و د}$.



شكل (٩ – ٧)

http://E-learning-moe.edu.ye

تعريف (٩ : ٥)

مجموع المتجهين $\overrightarrow{ف_1}$ ، $\overrightarrow{ف_2}$ هو المتجه $\overrightarrow{ف}$ الذي يمثله حاصل جمع المتجهين $\overrightarrow{و د_1}$ ، $\overrightarrow{و د_2}$ الممثلين لـ $\overrightarrow{ف_1}$ ، $\overrightarrow{ف_2}$ فيكون : $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2} = \overrightarrow{و د_1} + \overrightarrow{و د_2} = \overrightarrow{و د}$.

لاحظ أن :

١) المحصلة $\overrightarrow{و د}$ تمثل قطر متوازي الأضلاع $و د_1 د د_2$ ، ولذلك تسمى هذه القاعدة قاعدة متوازي الأضلاع.

٢) من الشكل (٩ – ٧) نجد أن :

$$\overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2} = \overrightarrow{ف_2} + \overrightarrow{ف_1} = \overrightarrow{ف}$$

أي أن عملية جمع المتجهات إبدالية .

٣) من الشكل (٩ –٧) لإيجاد $\overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2}$ نكتفي برسم ضلعين ، وقطر من متوازي الأضلاع ولنأخذ المثلث $و د_1 د$ في الشكل (٩–٧) .

فيكون : $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2} = \overrightarrow{و د_1} + \overrightarrow{د_1 د} = \overrightarrow{و د}$.

وسنحصل على نفس النتيجة عندما نأخذ المثلث $و د_2 د$ في نفس الشكل

فيكون : $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ف_2} + \overrightarrow{ف_1} = \overrightarrow{و د_2} + \overrightarrow{د_2 د} = \overrightarrow{و د}$.

كلٌ من القاعدتين تسمى قاعدة المثلث .

خواص عملية جمع المتجهات:

١) عملية الجمع ثنائية على مجموعة المتجهات في المستوى .

٢) عملية الجمع إبدالية لأن : $\overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2} = \overrightarrow{ف_2} + \overrightarrow{ف_1}$.

٣) عملية الجمع تجمية لأن : $(\overrightarrow{ف_1} + \overrightarrow{ف_2}) + \overrightarrow{ف_3} = \overrightarrow{ف_1} + (\overrightarrow{ف_2} + \overrightarrow{ف_3})$.

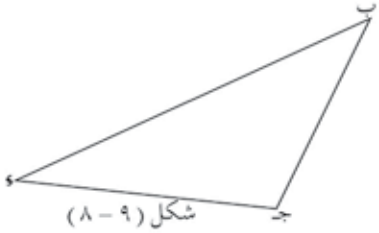
٤) العنصر المحايد الجمعي هو المتجه الصفري $\overrightarrow{٠}$ لأن $\overrightarrow{ف} + \overrightarrow{٠} = \overrightarrow{٠} + \overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ف}$.

٥) لكل متجه $\overrightarrow{ف}$ نظير جمعي هو $(-\overrightarrow{ف})$ فإذا كان $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{أ ب}$ فإن نظير المتجه $\overrightarrow{ف}$ هو $(-\overrightarrow{ف}) = -(\overrightarrow{أ ب}) = \overrightarrow{ب أ}$ ،

ونجد : $\overrightarrow{ف} + (-\overrightarrow{ف}) = \overrightarrow{٠} \Leftarrow \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{٠}$.

مثال (٩– ١٠) إذا كان ب جـ د مثلث [شكل (٩–٨)] .

أثبت أن : $\overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ ء} + \overrightarrow{ء ب} = \overrightarrow{٠}$



شكل (٩ – ٨)

الحل

الطرف الأيمن $= (\overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ ء}) + \overrightarrow{ء ب}$

$= \overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{ء ب}$

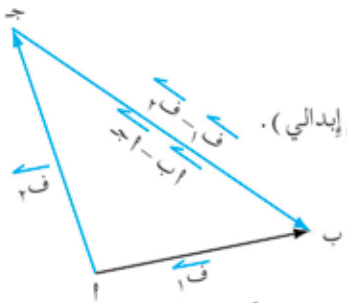
$= \overrightarrow{ب ء} + (-\overrightarrow{ب ء}) = \overrightarrow{٠}$ = الطرف الأيسر .

http://E-learning-moe.edu.ye

ثانياً : طرح المتجهات هندسياً :

تعريف (٩ : ٦)

ناتج طرح متجه $\overleftarrow{ف_٢}$ من المتجه $\overleftarrow{ف_١}$ هو عبارة عن حاصل جمع المتجه $\overleftarrow{ف_١}$ مع نظير $\overleftarrow{ف_٢}$
فيكون : $\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{ف_١} + (- \overleftarrow{ف_٢})$.



شكل (٩ – ٩)

ليكن $\overleftarrow{ف_١} = \overleftarrow{ا ب}$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{ا جـ}$ [شكل (٩ – ٩)]
فإن $\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{ف_١} + (- \overleftarrow{ف_٢})$
$\Leftarrow \overleftarrow{ا ب} - \overleftarrow{ا جـ} = \overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{جـ ا} = \overleftarrow{جـ ب}$. (الجمع إبدالي) .
$\Leftarrow \boxed{\overleftarrow{ا ب} - \overleftarrow{ا جـ} = \overleftarrow{جـ ب}}$
ويمكن الوصول إلى النتيجة نفسها عن طريق تطبيق
قاعدة المثلث . فيكون : $\overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{ا جـ} + \overleftarrow{جـ ب}$
وبإضافة نظير $\overleftarrow{ا جـ}$ إلى الطرفين ينتج : $\overleftarrow{ا ب} - \overleftarrow{ا جـ} = \overleftarrow{جـ ب}$.

مثال (٩ – ١١) إذا كانت ا ، ب ، جـ ، ء أربع نقاط في المستوى [الشكل (٩–١٠)]
أوجد ما يلي :
١) $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء}$
٢) $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء} + \overleftarrow{ء ا}$



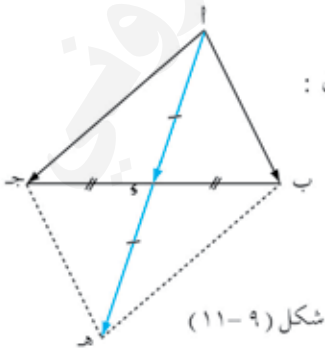
شكل (٩ – ١٠)

الحـــل

١) $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء} = (\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب جـ}) + \overleftarrow{جـ ء}$.
$= \overleftarrow{ا جـ} + \overleftarrow{جـ ء} = \overleftarrow{ا ء}$.
٢) $(\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ ء}) + \overleftarrow{ء ا} = \overleftarrow{ا ء} + \overleftarrow{ء ا} = \overleftarrow{٠}$.

مثال (٩ – ١٢) ا ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ [شكل (٩–١١)]

الحـــل اثبت أن : $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ا جـ} = ٢ \overleftarrow{ا ء}$.
نكمل رسم متوازي الاضلاع ا ب هـ جـ [شكل (٩–١١)] فيكون :
$\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ا جـ} = \overleftarrow{ا هـ}$ (قاعدة متوازي الأضلاع) .
∵ القطران في متوازي الاضلاع ينصف كلاً منها الآخر .
∴ $\overleftarrow{ا ء} = \overleftarrow{ء هـ}$
∴ $\overleftarrow{ا هـ} = ٢ \overleftarrow{ا ء}$.
∴ $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ا جـ} = ٢ \overleftarrow{ا ء}$.



شكل (٩ – ١١)

http://E-learning-moe.edu.ye

حل آخر :

∵ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$ ـــــ (١) ∴ $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{أ ء}$ ـــــ (٢)

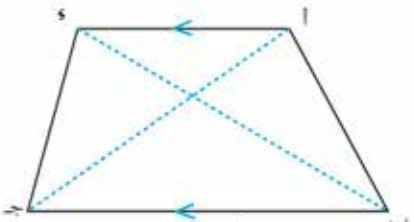
بجمع (١)،(٢) ينتج أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} + (\overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{جـ ء}) = ٢\overrightarrow{أ ء}$.

، ∵ $\overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{جـ ء} = \overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{ء ب} = \overrightarrow{٠}$

∴ $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = ٢\overrightarrow{أ ء}$.

مثال (٩ - ١٣) أ ب جـ ء شبه منحرف [شكل (٩-١٢)] فيه $\overrightarrow{ب جـ} = ٢\overrightarrow{أ ء}$.

أثبت أن : $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{أ ء}$.



شكل (٩-١٢)

الحـــل

∵ $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ}$ ـــــ (١)

، ∵ $\overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أ ء}$ ـــــ (٢)

بالجمع ينتج أن :

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{أ ء}$.

$\Leftarrow \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{٠} + ٢\overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{أ ء}$ لأن $\overrightarrow{ب جـ} = ٢\overrightarrow{أ ء}$

$\Leftarrow \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{أ ء}$.

تمارين ومسائل (٩ : ٢)

[١] أي العبارات التالية صائبة، وأيها خطأ مع تصويب الخطأ أينما وجد :

١ - إذا كان $\overrightarrow{ق_١} = (٥ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (-١ ، ٤)$ فإن $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} = (٦ ، ٢)$.

٢ - إذا كان ك (١ ، ٢) = (٣ ، -١) + (-١ ، ٥) فإن قيمة ك = ٤ .

٣ - إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط في المستوى فإن $\overrightarrow{جـأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب جـ}$.

٤ - إذا كان ك $\overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ق} = \overrightarrow{٠}$ فإن قيمة ك = ١ .

٥ - إذا كان ء منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ فإن : $\overrightarrow{أ ء} + \overrightarrow{ب ء} = ٢\overrightarrow{أ ء}$.

[٢] إذا كان $\overrightarrow{ق_١} = (٢ ، -٢)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (٠ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = (\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢})$. فأوجد ناتج ما يأتي :

١) $٢\overrightarrow{ق_١} - ٥\overrightarrow{ق_٢}$ ، ٢) $\overrightarrow{ق_١} + ٣(\overrightarrow{ق_٢} - ٤\overrightarrow{ق_٣})$ ، ٣) $|\overrightarrow{ق_٢} + ٣\overrightarrow{ق_١}|$.

[٣] إذا كان $\overrightarrow{ق_١} = (٧ ، ١٢)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (-١ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = (٩ ، ٤)$. فأوجد قيمة ك التي تحقق المعادلة : $\overrightarrow{ق_١} + ك\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{ق_٣}$.

[٤] إذا كانت أ (٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٧) ، جـ (٠ ، -٢) ، ء (١ ، -١) ، $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{أب} - ٤\overrightarrow{جـ ء}$

المطلوب : ١ - أوجد مركبتي $\overrightarrow{ق}$ ، ثم أوجد طوله وميله . ٢ - أثبت أن : $\overrightarrow{أب} = ٣\overrightarrow{جـ ء}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

[٥] إذا كانت أ(−٢ ، ٤) ، ب(٣ ، ٧) ، جـ(−٣ ، −٢) ، ء(س ، ص) . فأوجد إحداثي النقطة ء في كل من الحالات التالية :

١) $\overrightarrow{أء} = (٣ ، ١)$ ، ٢) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} = ٢\overrightarrow{جـء}$ ، ٣) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{جـء}$.

[٦] أ ب جـ مثلث ، ء $\in \overline{ب جـ}$ بحيث كان $\overrightarrow{ب ء} = ٣\overrightarrow{ء جـ}$ فاثبت أن :

١) $\overrightarrow{ب أ} + \overrightarrow{أجـ} = ٤\overrightarrow{ء جـ}$ ، ٢) $\overrightarrow{ءأ} + \overrightarrow{أب} = ٣\overrightarrow{ء جـ}$.

[٧] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{ب جـ} // \overline{أء}$ ، $|ب جـ| = ٣|أء|$.أثبت أن : $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{ب ء} = ٤\overrightarrow{أء}$.

[٨] إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ خمس نقاط في المستوى فأكمل ما يأتي :

١) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{ء هـ} = ...$ ٢) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{ء هـ} + \overrightarrow{هـأ} = ...$.

٩ : ٣ توازي وتعامد متجهين

في ضوء معرفتك لميل الخط المستقيم سنستنتج شرطي توازي وتعامد متجهين :

فإذا كان $\overrightarrow{ف_١} = و\overrightarrow{د_١} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = و\overrightarrow{د_٢} = (س_٢ ، ص_٢)$ فإنه .

أولاً : يتوازي المتجهان $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ إذا وفقط إذا كان :

ميل $و\overrightarrow{د_١}$ = ميل $و\overrightarrow{د_٢}$ $\Leftarrow$ $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

$\Leftarrow$ $س_١ ص_٢ = س_٢ ص_١$ $\Leftarrow$ $س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١ = ٠$.

$\therefore$ $\boxed{\overrightarrow{ف_١} // \overrightarrow{ف_٢} \Leftrightarrow س_١ ص_٢ - س_٢ ص_١ = ٠}$.

$\because$ $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ $\Leftarrow$ $\frac{س_٢}{س_١} = \frac{ص_٢}{ص_١} = ك$ $\Leftarrow$ $\frac{س_٢}{س_١} = ك$ $\Leftarrow$ $س_٢ = ك\, س_١$

$\frac{ص_٢}{ص_١} = ك$ $\Leftarrow$ $ص_٢ = ك\, ص_١$

$\because$ $و\overrightarrow{د_٢} = (س_٢ ، ص_٢)$.

$\therefore$ $و\overrightarrow{د_٢} = (ك\, س_١ ، ك\, ص_١) = ك(س_١ ، ص_١) = ك\, و\overrightarrow{د_١}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{ف_٢} = ك\overrightarrow{ف_١}$.

$\therefore$ $\boxed{\overrightarrow{ف_١} // \overrightarrow{ف_٢} \Leftrightarrow \overrightarrow{ف_٢} = ك\overrightarrow{ف_١}}$.

ثانياً – يتعامد المتجهان $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ إذا وفقط إذا كان :

ميل $و\overrightarrow{د_١}$ × ميل $و\overrightarrow{د_٢} = -١$ $\Leftarrow$ $\frac{ص_١}{س_١} \times \frac{ص_٢}{س_٢} = -١$ $\Leftarrow$ $ص_١ ص_٢ = -س_١ س_٢$

$\Leftarrow$ $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢ = ٠$.

http://E-learning-moe.edu.ye

نستنتج مما سبق شرط التعامد التالي :

$\overrightarrow{ف_1} \perp \overrightarrow{ف_2} \Leftrightarrow س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = 0$.

مثال (٩ - ١٤) إذا كان $\overrightarrow{ف_1} = (٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ف_2} = (-٦ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ف_3} = (١ ، ٢)$:

أثبت أن :

١) $\overrightarrow{ف_1} // \overrightarrow{ف_2}$. ٢) $\overrightarrow{ف_2} \perp \overrightarrow{ف_3}$. ٣) ما علاقة $\overrightarrow{ف_1}$ بـ $\overrightarrow{ف_3}$.

الحـــل

١) $\because \overrightarrow{ف_1} = (٢ ، -١) \Leftarrow س_1 = ٢$ ، $ص_1 = -١$.

$\because \overrightarrow{ف_2} = (-٦ ، ٣) \Leftarrow س_2 = -٦$ ، $ص_2 = ٣$.

$\because س_1 ص_2 - س_2 ص_1 = ٢ \times ٣ - (-٦) \times (-١) = ٦ - ٦ =$ صفر .

$\therefore \overrightarrow{ف_1} // \overrightarrow{ف_2}$

حل آخر :

١) $\because \overrightarrow{ف_2} = (-٦ ، ٣)$ $\therefore \overrightarrow{ف_2} = -٣ (٢ ، -١)$

$\therefore \overrightarrow{ف_2} = -٣ \overrightarrow{ف_1}$ $\therefore \overrightarrow{ف_2} // \overrightarrow{ف_1}$ لاحظ $ك = -٣$.

٢) $\overrightarrow{ف_2} = (-٦ ، ٣)$ $\therefore س_1 = -٦$ ، $ص_1 = ٣$.

$\overrightarrow{ف_3} = (١ ، ٢)$ $\therefore س_2 = ١$ ، $ص_2 = ٢$.

، $\because س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = -٦ \times ١ + ٣ \times ٢ = -٦ + ٦ =$ صفر .

$\therefore \overrightarrow{ف_2} \perp \overrightarrow{ف_3}$.

٣) $\because \overrightarrow{ف_1} // \overrightarrow{ف_2} \wedge \overrightarrow{ف_2} \perp \overrightarrow{ف_3}$ $\therefore \overrightarrow{ف_1} \perp \overrightarrow{ف_3}$.

مثال (٩ - ١٥) لتكن أ(١ ، -٤) ، ب(٧ ، ٢) ، جـ(٣ ، ٦) ، ء(-٣ ، ٠) أربع نقاط في المستوى . فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

الحـــل

نأخذ ضلعين متقابلين ونثبت أنهما متوازيان ومتساويان في الطول ، ثم نثبت أن إحدى الزوايا قائمة .

- لنأخذ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ء جـ}$.

$\overrightarrow{أب} = ب - أ = (٦ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ءجـ} = جـ - ء = (٦ ، ٦)$

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وجـ} = (٦ ، ٦)$ ، ∴ $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{وجـ}$ ، $٨ \, |\overrightarrow{أب}| = |\overrightarrow{جـو}|$.

∴ $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{وجـ}$ ، $٨ \, |أب| = |جـو|$.

∴ الشكل أ ب جـ و متوازي اضلاع ـــ (١) .

- لنأخذ ∡ أ ب جـ .

$\overrightarrow{أب} = (٦ ، ٦)$ ، $\overrightarrow{بجـ} = جـ - ب = (-٤ ، ٤)$.

∴ $س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢ = ٦ \times -٤ + ٦ \times ٤ = -٢٤ + ٢٤ =$ صفر .

∴ $\overrightarrow{أب} \perp \overrightarrow{بجـ}$

∴ $ق(∡ أ ب جـ) = ٩٠°$ ـــ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

الشكل أ ب جـ و مستطيل .

تمارين ومسائل (٩ : ٣)

[١] نفرض أن المتجهات المعطاة في كل مما يأتي غير صفرية فأكمل ما يلي :

١ - إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = ٥ \overrightarrow{ف_٢}$ فإن المتجهين $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ .....

٢ - إذا كان $\overrightarrow{أب} = (س ، ص)$ ، $\overrightarrow{جـو} = (-ص ، س)$ فإن المتجهين ..... .

٣ - إذا كان ميل المتجه $\overrightarrow{ف_١}$ = ميل المتجه $\overrightarrow{ف_٢}$ فإن المتجهين ..... .

٤ - إذا كان $\overrightarrow{و_١ د_١} = (-٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{و_٢ د_٢} = (٣ ، ص)$ فإنه يكون $\overrightarrow{و_١ د_١} \perp \overrightarrow{و_٢ د_٢}$ عندما تكون قيمة ص = ... ، $\overrightarrow{و_١ د_١} \parallel \overrightarrow{و_٢ د_٢}$ إذا كانت قيمة ص = ...

[٢] إذا كانت أ(١٠ ، ٤) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(-٢ ، ٣) ، و(٠ ، ٨) . أثبت أنه :

١) $\overrightarrow{أو} \parallel \overrightarrow{بجـ}$. ٢) $\overrightarrow{بجـ} \perp \overrightarrow{وجـ}$.

[٣] إذا كانت أ(٢ ، ٦) ، ب(٤ ، ٤) ، جـ(٢ ، ٢) ، و(٠ ، ٤) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ و مربع ، ثم أوجد مساحته .

[٤] إذا كانت أ(٢ ، ٢) ، ب(٤ ، -١) ، جـ(٢ ، -٣) ، و(٠ ، ٠) ، فأثبت أن الشكل أ ب جـ و متوازي أضلاع .

[٥] أ ب جـ و شبه منحرف فيه $\overrightarrow{بجـ} = ٢ \overrightarrow{أو}$ ، فإذا كانت هـ ، و منتصفي $\overline{أو}$ ، $\overline{بجـ}$ على الترتيب ، فأثبت أن : $\overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{جـو} = ٢ \overrightarrow{وهـ}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

٩ : ٤ متجه الوحدة

المتجهات ذات اطوال مختلفة ومنها متجه يسمى متجه الوحدة وهو أي متجه طوله يساوى وحدة الأطوال .

أي إذا كان $|\overleftarrow{ف}| = ١$ فإن $\overleftarrow{ف}$ يسمى متجه وحدة ، ولكل متجه $\overleftarrow{ف}$ متجه وحدة له نفس اتجاه $\overleftarrow{ف}$ يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ف}^*$ ، ويعطى بالقاعدة التالية :

$$\overleftarrow{ف}^* = \frac{١}{|\overleftarrow{ف}|} \times \overleftarrow{ف} \quad .$$

مثال (٩ - ١٦) بين أياً من المتجهات التالية متجه وحدة وإذا لم يكن . فأوجد له متجه الوحدة باتجاهه.

١) $\overleftarrow{ف_١} = (\frac{١}{٢\sqrt{٧}} ، -\frac{١}{٢\sqrt{٧}})$.

٢) $\overleftarrow{ف_٢} = (٣ ، ٤)$.

٣) $\overleftarrow{أب} = (٠ ، ٢)$.

٤) $\overleftarrow{جـ_٤} = (١ ، ٠)$.

الحل

١) $\overleftarrow{ف_١} = (\frac{١}{٢\sqrt{٧}} ، -\frac{١}{٢\sqrt{٧}}) \therefore |\overleftarrow{ف_١}| = \sqrt{(\frac{١}{٢\sqrt{٧}})^٢ + (-\frac{١}{٢\sqrt{٧}})^٢} = \sqrt{\frac{١}{٢^٢} + \frac{١}{٢^٢}} = \sqrt{١} = ١$

$\therefore \overleftarrow{ف_١}$ متجه وحدة .

٢) $\overleftarrow{ف_٢} = (٣ ، ٤)$

$\therefore |\overleftarrow{ف_٢}| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \Leftarrow \overleftarrow{ف_٢}$ لايمثل متجه وحدة

نوجد متجه الوحدة للمتجه $\overleftarrow{ف_٢}$.

$\therefore \overleftarrow{ف_٢}^* = \frac{١}{|\overleftarrow{ف_٢}|} \times \overleftarrow{ف_٢} = \frac{١}{٥} \times (٣ ، ٤) \Leftarrow \overleftarrow{ف}^* = (\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$.

٣) $\overleftarrow{أب} = (٠ ، ٢) \therefore |\overleftarrow{أب}| = \sqrt{(٠)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$.

$\therefore \overleftarrow{أب}$ ليس متجه وحدة .

$\therefore \overleftarrow{أب}^* = \frac{١}{|\overleftarrow{أب}|} \times \overleftarrow{أب} = \frac{١}{٢} \times (٠ ، ٢) \Leftarrow \overleftarrow{أب}^* = (٠ ، ١)$.

٤) $\overleftarrow{جـ_٤} = (١ ، ٠) \Leftarrow |\overleftarrow{جـ_٤}| = \sqrt{(١)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١} = ١ \Leftarrow \overleftarrow{جـ_٤}$ متجه وحده.

http://E-learning-moe.edu.ye

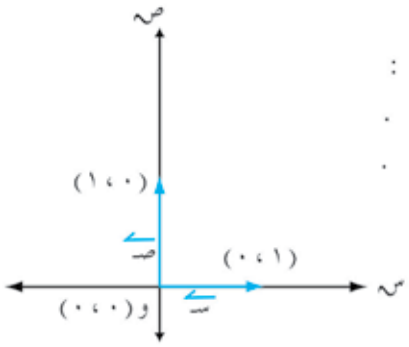
متجها الوحدة الأساسيان :

متجها الوحدة الأساسيان هما المتجهان $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ حيث :

$\overleftarrow{س}$ = (١ ، ٠) متجه الوحدة باتجاه المحور السيني الموجب .

$\overleftarrow{ص}$ = (٠ ، ١) متجه الوحدة باتجاه المحور الصادي الموجب .

[شكل (٩ – ١٣)]



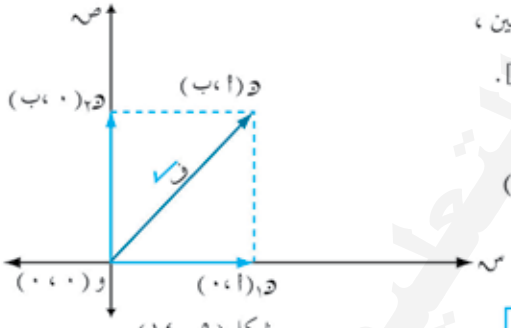
شكل (٩ – ١٣)

لاحظ أن المحاور الإحداثية متعامدة .

∴ $\overleftarrow{س} \perp \overleftarrow{ص}$ ، أو استخدم شرط التعامد في إثبات أن $\overleftarrow{س} \perp \overleftarrow{ص}$.

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

إذا كان لدينا المتجه القياسي $\overleftarrow{ف}$ = (أ ، ب) ، فيمكن كتابته بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين ، وذلك عن طريق تحليل المتجه $\overleftarrow{ف}$ إلى حاصل جمع متجهين قياسيين ، واقعين على المحاور الإحداثية [شكل (٩ – ١٤)].



شكل (٩ – ١٤)

فيكون $\overleftarrow{ف}$ = (أ ، ب) = $\overleftarrow{و د_١}$ + $\overleftarrow{و د_٢}$.

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = (أ ، ب) = (أ ، ٠) + (٠ ، ب)

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = أ (١ ، ٠) + ب (٠ ، ١) .

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$.

⇐ $\overleftarrow{ف}$ = (أ ، ب) = أ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$.

مثال (٩ – ١٧) عبّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : $\overleftarrow{ف_١}$ = (٣ ، ١٢) ، $\overleftarrow{ف_٢}$ = (٠ ، –٥) ، $\overleftarrow{جـ}$ ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) .

الحـــل

∵ $\overleftarrow{ف_١}$ = (٣ ، ١٢) ∴ $\overleftarrow{ف_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$.

، ∵ $\overleftarrow{ف_٢}$ = (٠ ، –٥) ∴ $\overleftarrow{ف_٢}$ = –٥ $\overleftarrow{ص}$.

، ∵ $\overleftarrow{جـ}$ = ($\frac{٣}{٤}$ ، ٠) ∴ $\overleftarrow{جـ}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\overleftarrow{س}$.

مثال (٩ – ١٨) إذا كانت أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، –٤) ، $\overleftarrow{ف}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ – ٥ $\overleftarrow{ص}$. فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين .

١) $\overleftarrow{أب}$ + $\overleftarrow{ف}$ ، ٢) ٣ $\overleftarrow{أب}$ – ٢ $\overleftarrow{ف}$.

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

$\overrightarrow{أب} = ب - أ = (١ ، -٦) = \overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}$.

١) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ف} = (\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}) + (٤\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}) = (\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{س}) - ٦\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ص}$

$= ٥\overrightarrow{س} - ١١\overrightarrow{ص}$.

٢) $٣\overrightarrow{أب} - ٢\overrightarrow{ف} = ٣(\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}) - ٢(٤\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص})$.

$= ٣\overrightarrow{س} - ١٨\overrightarrow{ص} - ٨\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} = -٥\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص}$.

تمارين ومسائل (٩ : ٤)

[١] بيّن أياً من المتجهات التالية هو متجه وحدة : $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ف} = (\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥})$ ، $\overrightarrow{وجـ} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{وب} = (١ ، ١)$.

[٢] إذا كانت أ(٢ ، -١) ، ب(٥ ، ٥) ، جـ(١ ، ٣) ، ء(٠ ، ٧) ، $\overrightarrow{ف} = ٤\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$.

فأوجد ناتج ما يلي بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين :

١) $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{جـء}$ ، ٢) $٣\overrightarrow{أب} - ٢\overrightarrow{جـء} + \overrightarrow{ف}$ ،

٣) $\overrightarrow{وأ} + \overrightarrow{وب} + \overrightarrow{وجـ} + \overrightarrow{وء} + \overrightarrow{ف}$.

[٣] أوجد متجه الوحدة باتجاه المتجهات التالية : $\overrightarrow{ف_١} = (٢ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{بجـ} = ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{وأ} = (-٦ ، ٨)$.

[٤] إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = أ\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = ٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$. فأوجد قيمتي أ ، ب اللتين تحققان المعادلة التالية : $\overrightarrow{ف_١} + \overrightarrow{ف_٢} = ٥\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$.

[٥] عبّر عن المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين : $\overrightarrow{ف_١} = (١٢ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = (\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤})$ ، $\overrightarrow{أب} = (٦ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{وم} = (٠ ، -٥)$.

٩ : ٥ الضـرب الداخـلي لمتجهـين

هناك نوعان من ضرب المتجهات نتناول منها في هذا البند النوع الأول ويسمى بالضرب الداخلي لمتجهين كما يسمى بالضرب العددي لمتجهين .

تعريف (٩ : ٦)

حاصل الضرب الداخلي لمتجهين $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ هو عدد حقيقي يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ف_١} \bullet \overrightarrow{ف_٢}$ ويعطى بالعلاقة : $\overrightarrow{ف_١} \bullet \overrightarrow{ف_٢} = |\overrightarrow{ف_١}| \times |\overrightarrow{ف_٢}|$ جتاهـ ، $٠ \leq هـ \leq \pi$.

حيث هـ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ ،

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (٩ - ١٩) إذا كان $|\overleftarrow{ف_١}| = ٣$ ، $|\overleftarrow{ف_٢}| = ٢$. فاوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢}$ عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما كالتالي :

١) هـ = ٦٠° ، ٢) هـ = ٠° ، ٣) هـ = ٩٠° .

الحـــل

١) عندما هـ = ٦٠° فإن $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = |\overleftarrow{ف_١}| \times |\overleftarrow{ف_٢}|$ جتا هـ

$\Leftarrow \overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٦٠° $= ٣ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ٣$.

٢) عندما هـ = ٠° فإن $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٠° $= ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$.

٣) عندما هـ = ٩٠° فإن $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = ٣ \times ٢ \times$ جتا ٩٠° $= ٣ \times ٢ \times ٠ = ٠$.

نتـائـج :

١) يتعامد متجهان غير صفريين $\overleftarrow{ف_١}$ ، $\overleftarrow{ف_٢}$ إذا كان حاصل ضربهما الداخلي يساوي صفراً أي أن :

$$\overleftarrow{ف_١} \perp \overleftarrow{ف_٢} \Leftrightarrow \overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = ٠$$

٢) يتوازي $\overleftarrow{ف_١}$ ، $\overleftarrow{ف_٢}$ إذا كان : $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = \pm |\overleftarrow{ف_١}| \cdot |\overleftarrow{ف_٢}|$.

أي أن $\overleftarrow{ف_١} // \overleftarrow{ف_٢} \Leftrightarrow \frac{\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢}}{|\overleftarrow{ف_١}| \cdot |\overleftarrow{ف_٢}|} = \pm ١$.

مع ملاحظة أنه إذا كان الناتج + ١ فإن هـ = ٠° ، والمتجهان لهما نفس الاتجاه ،

وإذا كان الناتج − ١ فإن هـ = ١٨٠° ، والمتجهان متعاكسان .

٣) حاصل الضرب الداخلي لمتجه في نفسه يساوي مربع طوله أي أن : $\overleftarrow{ف} \cdot \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}|^٢$.

الإثبات : ∵ هـ = ٠° ∴ $\overleftarrow{ف} \cdot \overleftarrow{ف} = |\overleftarrow{ف}| \times |\overleftarrow{ف}|$ جتا ٠° $= |\overleftarrow{ف}|^٢ \times ١ = |\overleftarrow{ف}|^٢$.

٤) $\overleftarrow{سـ} \cdot \overleftarrow{سـ} = \overleftarrow{صـ} \cdot \overleftarrow{صـ} = ١$ ، $\overleftarrow{سـ} \cdot \overleftarrow{صـ} = \overleftarrow{صـ} \cdot \overleftarrow{سـ} = ٠$.

٥) إذا كان $\overleftarrow{ف_١} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = (س_٢ ، ص_٢)$ فإنه يمكن إيجاد علاقة تكافئ العلاقة السابقة في إيجاد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\overleftarrow{ف_١}$ ، $\overleftarrow{ف_٢}$ ، وهذه العلاقة هي :

$$\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢ .$$

الاثبات: ∵ $\overleftarrow{ف_١} = س_١ \overleftarrow{سـ} + ص_١ \overleftarrow{صـ}$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = س_٢ \overleftarrow{سـ} + ص_٢ \overleftarrow{صـ}$.

∴ $\overleftarrow{ف_١} \cdot \overleftarrow{ف_٢} = (س_١ \overleftarrow{سـ} + ص_١ \overleftarrow{صـ}) \cdot (س_٢ \overleftarrow{سـ} + ص_٢ \overleftarrow{صـ})$

$= س_١ س_٢ \overleftarrow{سـ} \cdot \overleftarrow{سـ} + س_١ ص_٢ \overleftarrow{سـ} \cdot \overleftarrow{صـ} + ص_١ س_٢ \overleftarrow{صـ} \cdot \overleftarrow{سـ} + ص_١ ص_٢ \overleftarrow{صـ} \cdot \overleftarrow{صـ}$

$= س_١ س_٢ |\overleftarrow{سـ}|^٢ + س_١ ص_٢ \times ٠ + ص_١ س_٢ \times ٠ + ص_١ ص_٢ |\overleftarrow{صـ}|^٢$.

http://E-learning-moe.edu.ye

∴ $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ = س$_1$ س$_2$ × ١ + ٠ + ٠ + ص$_1$ ص$_2$ × ١ .

∴ $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ = س$_1$ س$_2$ + ص$_1$ ص$_2$.

مثال (٩ – ٢٠) إذا كان $\overleftarrow{ف_1}$ = (٢ ، ٥) ، $\overleftarrow{ف_2}$ = (٣ ، – ٤) . فأوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ ، $\overleftarrow{ف_2} \cdot \overleftarrow{ف_1}$. وماذا تستنتج ؟

الحل

$\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ = ٢ × ٣ + ٥ × – ٤ = ٦ – ٢٠ = – ١٤ ،

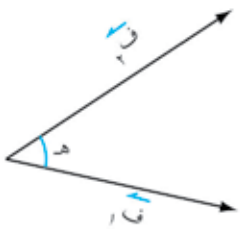
$\overleftarrow{ف_2} \cdot \overleftarrow{ف_1}$ = ٣ × ٢ + – ٤ × ٥ = ٦ – ٢٠ = – ١٤

نجد أن : $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ = $\overleftarrow{ف_2} \cdot \overleftarrow{ف_1}$. الضرب الداخلي إبدالي .

٦) نستطيع تحديد قياس الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{ف_1}$ ، $\overleftarrow{ف_2}$.

[شكل (٩ – ١٥)] عن طريق العلاقة التالية :

$$\text{جتا هـ} = \frac{\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}}{|\overleftarrow{ف_1}| \cdot |\overleftarrow{ف_2}|} \quad ، \quad ٠^\circ \leq \text{هـ} \leq ١٨٠^\circ .$$



شكل (٩ – ١٥)

مع ملاحظة أنه إذا كان :

١) $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2} > ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية حادة .

٢) $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2} < ٠$ فإن الزاوية المحدَّدة بالمتجهين هي زاوية منفرجة .

مثال (٩ – ٢١) إذا كان $\overleftarrow{ف_1}$ = (٣ ، ٠) ، $\overleftarrow{ف_2}$ = (٥ ، ٥) . فأوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{ف_1}$ ، $\overleftarrow{ف_2}$.

الحل

∵ $\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}$ = ٣ × ٥ + ٠ × ٥ = ١٥ ، $|\overleftarrow{ف_1}|$ = ٣ ، $|\overleftarrow{ف_2}| = ٥\sqrt{٢}$.

، ∵ جتا هـ = $\frac{\overleftarrow{ف_1} \cdot \overleftarrow{ف_2}}{|\overleftarrow{ف_1}| \cdot |\overleftarrow{ف_2}|} = \frac{١٥}{٣ \times ٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$.

∴ هـ = ٤٥° .

مثال (٩ – ٢٢) إذا كانت النقاط أ (١ ، ٢) ، ب (– ٢ ، ٦) ، جـ (٢ ، ٩) هي رؤوس المثلث أ ب جـ . فأحسب قياس زواياه الداخله .

الحل

∵ جتا أ = $\frac{\overleftarrow{أب} \cdot \overleftarrow{أجـ}}{|\overleftarrow{أب}| \cdot |\overleftarrow{أجـ}|}$

http://E-learning-moe.edu.ye

∵ $\overrightarrow{أب} = ب - أ = (-٣ ، ٤) \Leftarrow |\overrightarrow{أب}| = ٥$

∵ $\overrightarrow{أجـ} = جـ - أ = (١ ، ٧) \Leftarrow |\overrightarrow{أجـ}| = ٥\sqrt{٢}$.

، ∵ $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ} = -٣ \times ١ + ٤ \times ٧ = -٣ + ٢٨ = ٢٥$.

∴ جتا أ $= \frac{٢٥}{٥ \times ٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Leftarrow$ ق$(\angle أ) = ٤٥°$.

، ∵ جتا ب $= \frac{\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بجـ}}{|\overrightarrow{بأ}| \cdot |\overrightarrow{بجـ}|}$.

، ∵ $\overrightarrow{بأ} = أ - ب = (٣ ، -٤) \Leftarrow |\overrightarrow{بأ}| = ٥$.

، ∵ $\overrightarrow{بجـ} = جـ - ب = (٤ ، ٣) \Leftarrow |\overrightarrow{بجـ}| = ٥$.

، ∵ $\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بجـ} = ٣ \times ٤ + (-٤) \times ٣ = ١٢ - ١٢ = ٠$.

∴ $\overrightarrow{بأ} \perp \overrightarrow{بجـ} \Leftarrow$ ق$(\angle ب) = ٩٠°$ ⇐ ق$(\angle جـ) = ٤٥°$.

مثال (٩ - ٢٣) إذا كان $\overrightarrow{ف_١} = (س ، \sqrt{٣})$ ، $\overrightarrow{ف_٢} = (٢ ، -٢\sqrt{٣})$. فأوجد قيمة س إذا علمت أن قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ تساوي ٦٠° .

الحـــل

∵ $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢} = ٢س - ٦$ ، $|\overrightarrow{ف_١}| = \sqrt{س^٢ + ٣}$ ، $|\overrightarrow{ف_٢}| = ٤$.

، ∵ هـ = ٦٠° نعوض في العلاقة $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢} = |\overrightarrow{ف_١}| \cdot |\overrightarrow{ف_٢}|$ جتاهـ .

$\Leftarrow ٢س - ٦ = \sqrt{س^٢ + ٣} \times ٤ \times$ جتا ٦٠° $\Leftarrow ٢(س - ٣) = \sqrt{س^٢ + ٣} \times ٤ \times \frac{١}{٢}$.

$\Leftarrow (س - ٣) = \sqrt{س^٢ + ٣}$ بتربيع الطرفين

$\Leftarrow س^٢ - ٦س + ٩ = س^٢ + ٣ \Leftarrow -٦س = -٦ \Leftarrow$ **س = ١**

مثال (٩ - ٢٤) إذا كان $\overrightarrow{ف_١}$ ، $\overrightarrow{ف_٢}$ متجهين وكان $|\overrightarrow{ف_١}| = ٤$ ، $|\overrightarrow{ف_٢}| = \sqrt{٣}$ ، وقياس الزاوية بينهما ٣٠° المطلوب :

١ - أوجد $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢}$. ٢ - أوجد $|\overrightarrow{أ}|$ إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ف_١} - \overrightarrow{ف_٢}$.

الحـــل

١ - ∵ $\overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢} = |\overrightarrow{ف_١}| \times |\overrightarrow{ف_٢}|$ جتا ٣٠° .

$\Leftarrow \overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢} = ٤ \times \sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \overrightarrow{ف_١} \cdot \overrightarrow{ف_٢} = ٦$

http://E-learning-moe.edu.ye

٢ – ∵ $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢}$ بتربيع الطرفين ينتج أن : $(\overleftarrow{أ})^٢ = (\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢})^٢$.

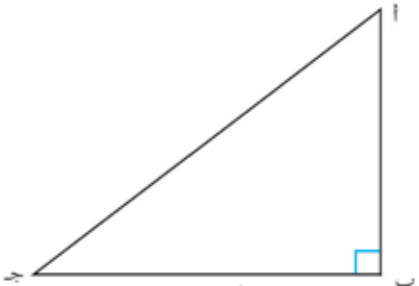
$\Leftarrow \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{أ} = (\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢})(\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢})$

$\Leftarrow |\overleftarrow{أ}|^٢ = \overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_٢} - \overleftarrow{ف_٢} \bullet \overleftarrow{ف_١} + \overleftarrow{ف_٢} \bullet \overleftarrow{ف_٢}$

$\Leftarrow |\overleftarrow{أ}|^٢ = |\overleftarrow{ف_١}|^٢ - ٢\overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_٢} + |\overleftarrow{ف_٢}|^٢$.

$\Leftarrow |\overleftarrow{أ}|^٢ = (٤)^٢ - ٢ \times ٦ + (\sqrt{٣})^٢ = ١٦ - ١٢ + ٣ \Leftarrow |\overleftarrow{أ}|^٢ = ٧ \Leftarrow |\overleftarrow{أ}| = \sqrt{٧}$

مثال (٩ – ٢٥) أثبت مبرهنة فيثاغورث باستخدام المتجهات .



شكل (٩ – ١٦)

الحـــل ليكن المثلث أ ب جـ قائم في ب

[شكل (٩ –١٦)] المطلوب : إثبات أن :

$|\overleftarrow{أجـ}|^٢ = |\overleftarrow{أب}|^٢ + |\overleftarrow{ب جـ}|^٢$.

الإثبات : ∵ $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب جـ}$ بتربيع الطرفين .

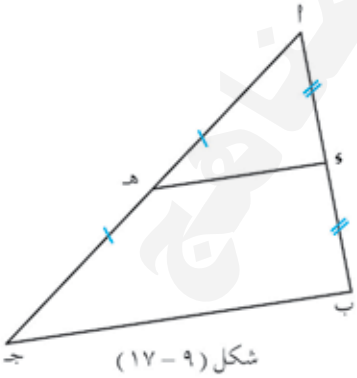
$\Leftarrow (\overleftarrow{أجـ})^٢ = (\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب جـ})^٢$

$\Leftarrow |\overleftarrow{أجـ}|^٢ = |\overleftarrow{أب}|^٢ + ٢\overleftarrow{أب} \bullet \overleftarrow{ب جـ} + |\overleftarrow{ب جـ}|^٢$

$\Leftarrow |\overleftarrow{أجـ}|^٢ = |\overleftarrow{أب}|^٢ + ٢ \times ٠ + |\overleftarrow{ب جـ}|^٢$ (لأن $\overleftarrow{أب} \perp \overleftarrow{ب جـ}$)

$\Leftarrow |\overleftarrow{أجـ}|^٢ = |\overleftarrow{أب}|^٢ + |\overleftarrow{ب جـ}|^٢$.

مثال (٩ – ٢٦) أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.



شكل (٩ – ١٧)

المعطيات : أ ب جـ مثلث [شكل (٩ – ١٧)] ،

و ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب .

المطلوب : إثبات ان : $\overline{وهـ} // \overline{ب جـ}$ ، $|\overleftarrow{وهـ}| = \frac{١}{٢}|\overleftarrow{ب جـ}|$.

البرهان : ∵ $\overleftarrow{وهـ} = \overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{أهـ}$ ـــــ (١) ،

$\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{ب أ} + \overleftarrow{أجـ}$ ـــــ (٢) بجمع (١) ، (٢) ينتج :

$\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{وهـ} = \overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{ب أ} + \overleftarrow{أهـ} + \overleftarrow{أجـ}$ ،

∵ $\overleftarrow{ب أ} = ٢\overleftarrow{وأ}$ ، ∵ $\overleftarrow{أجـ} = ٢\overleftarrow{أهـ}$.

∴ $\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{وهـ} = \overleftarrow{وأ} + ٢\overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{أهـ} + ٢\overleftarrow{أهـ}$.

∴ $\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{وهـ} = ٣\overleftarrow{وأ} + ٣\overleftarrow{أهـ} = ٣(\overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{أهـ})$ ، ∵ $\overleftarrow{وأ} + \overleftarrow{أهـ} = \overleftarrow{وهـ}$

http://E-learning-moe.edu.ye

$\therefore \overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{ء هـ} = ٣ \overleftarrow{ء هـ}$ ، $\therefore \overleftarrow{ب جـ} = ٢ \overleftarrow{ء هـ}$.

$\therefore \overleftarrow{ب جـ} // \overleftarrow{ء هـ}$ ، $|\overleftarrow{ب جـ}| = ٢ |\overleftarrow{ء هـ}|$

$\therefore \overline{ب جـ} // \overline{ء هـ}$ ، $|\overline{ب جـ}| = ٢ |\overline{ء هـ}|$ $\therefore |\overline{ء هـ}| = \frac{١}{٢} |\overline{ب جـ}|$.

تمارين ومسائل (٩ : ٥)

[١] أكمل ما يلي :

١ – إذا كان $\overleftarrow{ف} = (٥ ، ١٢)$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = (-١١ ، ٤)$ فإن $\overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_٢} = ...$

٢ – إذا كان $\overleftarrow{أ ب} \bullet \overleftarrow{جـ ء} = ٠$ فإن المتجهان .....

٣ – إذا كان $\overleftarrow{ف_١} // \overleftarrow{ف_٢}$ فإن $\overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_٢} = ...$

٤ – حاصل ضرب المتجه $\overleftarrow{ف}$ في نفسه يساوى .....

[٢] أوجد حاصل الضرب الداخلي $\overleftarrow{ف_١} \bullet \overleftarrow{ف_٢}$ في كل من الحالات التالية :

١) $\overleftarrow{ف_١} = (١ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = ٩ \overleftarrow{س} + ١٣ \overleftarrow{ص}$.

٢) $\overleftarrow{ف_١} = (\sqrt{٣} ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$.

٣) $\overleftarrow{ف_١} = \overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = \overleftarrow{جـ ء}$ حيث أ(-١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٥) ، جـ(-٤ ، ٩) ، ء(٧ ، ١١)

٤) $\overleftarrow{ف_١} = (-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = \sqrt{٢} \overleftarrow{س} - \sqrt{٦} \overleftarrow{ص}$.

٥) $\overleftarrow{ف_١} = -٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = ٥ \overleftarrow{س}$.

[٣] أوجد جيب تمام الزاوية المحدَّدة بالمتجهين $\overleftarrow{ف_١}$ ، $\overleftarrow{ف_٢}$ ، ثم استنتج قياسها حيث :

$\overleftarrow{ف_١} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ف_٢} = ٥ \overleftarrow{س}$.

[٤] أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد قياس زاويتي أ ، جـ الداخلتين . إذا علمت أن :

أ(٤ ، ٢) ، ب(٢ ، ٠) ، جـ(-١ ، ٣) .

[٥] إذا كان $|\overleftarrow{ف}| = |\overleftarrow{ص}|$ وقياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overleftarrow{ف}$ ، $\overleftarrow{ص}$ تساوي ٦٠° . فاوجد $\overleftarrow{ف}$.

[٦] أثبت أن $(\overleftarrow{ف_١} - \overleftarrow{ف_٢}) \bullet (\overleftarrow{ف_١} + \overleftarrow{ف_٢}) = |\overleftarrow{ف_١}|^٢ - |\overleftarrow{ف_٢}|^٢$.

[٧] أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overline{ب ء} \perp \overline{أ جـ}$ أثبت أن :

١) $|\overline{أ ب}|^٢ = |\overline{أ ء}| \times |\overline{أ جـ}|$ ، ٢) $|\overline{ب ء}|^٢ = |\overline{أ ء}| \times |\overline{ء جـ}|$.

http://E-learning-moe.edu.ye

١٠ : ١ الرمز (مجـــ) مدلوله وخواصه

تعرفت في الصف التاسع على الرمز **مجـــ** للدلالة على المجموع ويعبر عنه في بعض الكتب العربية والأجنبية بالرمز **E** وهو حرف أغريقي يقرأ سجماء .

فمثلاً :

$\text{مجـــ}_{ر=١}^{٥}\ ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥$ وهذا يعني مجموع حالة المتغير (ر) من ر = ١ إلى ر = ٥

وكذلك $\text{مجـــ}_{ر=٤}^{٩}\ ر = ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩$ ، $\text{مجـــ}_{ر=١٢}^{٢٨}\ ر = ١٢ + ١٣ + ١٤ + \ldots + ٢٨$

$\text{مجـــ}_{ر=١}^{د}\ ر = ١ + ٢ + ٣ + \ldots + د$ ، $\text{مجـــ}_{ر=٠}^{د}\ ر^{٢} = (٠)^{٢} + (١)^{٢} + (٢)^{٢} + \ldots + (د)^{٢}$

$\text{مجـــ}_{ر=١}^{د}\ س_{ر} = س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + \ldots + س_{د}$

مثال (١٠ - ١) عبر عن كل مما يأتي باستخدام الرمز مجـــ

أ) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ١٢$. ب) $ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} + \ldots + ل_{(د-١)}$

جـ) $٥ \times ٣^{٢} + ٥ \times ٤^{٢} + ٥ \times ٥^{٢} + \ldots + ٥ \times د^{٢}$

د) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \ldots + (٢د - ١)(٢د + ١)$

الحـــل

أ) $١ + ٢ + ٣ + \ldots + ١٢ = \text{مجـــ}_{ر=١}^{١٢}\ ر$ ب) $ل_{١} + ل_{٢} + ل_{٣} + \ldots + ل_{د-١} = \text{مجـــ}_{ر=١}^{د-١}\ ل_{ر}$

جـ) $٥ \times ٣^{٢} + ٥ \times ٤^{٢} + ٥ \times ٥^{٢} + \ldots + ٥ \times د^{٢} = \text{مجـــ}_{ر=٣}^{د}\ ٥ ر^{٢}$

د) $١ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \ldots + (٢د - ١)(٢د + ١) = \text{مجـــ}_{ر=١}^{د}\ (٢ر - ١)(٢ر + ١)$

http://E-learning-moe.edu.ye

خواص الرمز مجـ :

١ – $\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}}(س_ر + ص_ر) = (س_١ + ص_١) + (س_٢ + ص_٢) + (س_٣ + ص_٣) + ... + (س_د + ص_د)$

$= (س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_د) + (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ... + ص_د)$

$= \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} س_ر + \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} ص_ر$

$$\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} (س_ر + ص_ر) = \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} س_ر + \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} ص_ر \quad ، \quad د \in ص^+$$

٢ – $\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} أس_ر = أس_١ + أس_٢ + أس_٣ + ... + أس_د$

$= أ(س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_د) = أ \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} س_ر$

$$\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} أ س_ر = أ \overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} س_ر \quad ، \quad د \in ص^+ \quad ، \quad أ \in ح$$

٣ – $\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} ل = ل + ل + ل + ... + ل$ (إلى د من الحدود) $= د ل$

$$\overset{د}{\underset{ر=١}{مجـ}} ل = د ل \quad ، \quad د \in ص^+ \quad ، \quad ل \in ح$$

مثال (١٠ – ٢) أوجد قيمة كل مما يلي :

أ) $\overset{٦}{\underset{ر=٣}{مجـ}} (ر + ٤)$ ب) $\overset{٣}{\underset{ر=٠}{مجـ}} ٢^ر$ جـ) $\overset{٨}{\underset{ر=١}{مجـ}} ٥$

الحـــل

أ) $\overset{٦}{\underset{ر=٣}{مجـ}} (ر + ٤) = (٣ + ٤) + (٤ + ٤) + (٥ + ٤) + (٦ + ٤) = ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ = ٣٤$

ب) $\overset{٣}{\underset{ر=٠}{مجـ}} ٢^ر = ٢^٠ + ٢^١ + ٢^٢ + ٢^٣ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ = ١٥$

جـ) $\overset{٨}{\underset{ر=١}{مجـ}} ٥ = ٨ \times ٥ = ٤٠$

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (١٠ - ٣) عبّر عن كل مما يأتي باستخدام خواص الرمز مجـــ :

أ) (ل$_{١}$ + م$_{١}$) + (ل$_{٢}$ + م$_{٢}$) + (ل$_{٣}$ + م$_{٣}$) + ... + (ل$_{د}$ + م$_{د}$)

ب) ل$_{١}$ م$_{١}$ + ل$_{٢}$ م$_{٢}$ + ل$_{٣}$ م$_{٣}$ +... + ل$_{د-١}$ × م$_{د-١}$

جـ) (س$_{١}^{٣}$ – ص$_{١}$) + (س$_{٢}^{٣}$ – ص$_{٢}$) + (س$_{٣}^{٣}$ – ص$_{٣}$) +... + (س$_{د}^{٣}$ – ص$_{د}$)

الحـــل

أ) (ل$_{١}$ + م$_{١}$) + (ل$_{٢}$ + م$_{٢}$) + (ل$_{٣}$ + م$_{٣}$) + ... + (ل$_{د}$ + م$_{د}$)

$$\text{مجـــ}_{ر=١}^{د}(ل_ر + م_ر) = \text{مجـــ}_{ر=١}^{د} ل_ر + \text{مجـــ}_{ر=١}^{د} م_ر$$

ب) ل$_{١}$ م$_{١}$ + ل$_{٢}$ م$_{٢}$ + ل$_{٣}$ م$_{٣}$ +... + ل$_{د-١}$ × م$_{د-١}$ $= \text{مجـــ}_{ر=١}^{د-١} ل_ر م_ر$

جـ) (س$_{١}^{٣}$ – ص$_{١}$) + (س$_{٢}^{٣}$ – ص$_{٢}$) + (س$_{٣}^{٣}$ – ص$_{٣}$) +... + (س$_{د}^{٣}$ – ص$_{د}$)

$$= \text{مجـــ}_{ر=١}^{د}(س_ر^{٣} - ص_ر) = \text{مجـــ}_{ر=١}^{د} س_ر^{٣} - \text{مجـــ}_{ر=١}^{د} ص_ر$$

مثال (١٠ - ٤) لتكن س$_{١}$ = ٣١ ، س$_{٢}$ = ٢٧ ، س$_{٣}$ = ٣٥ ،

ع$_{١}$ = ٥ ، ع$_{٢}$ = ٧ ، ع$_{٣}$ = ٨ ،

استعن بالقيم السابقة في إيجاد قيمة ما يلي :

أ) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ س$_ر$ ب) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ (س$_ر$ + ع$_ر$) جـ) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ (ع$_ر$ + ٢)^{٢}

الحـــل

أ) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ س$_ر$ = س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ = ٣١ + ٢٧ + ٣٥ = ٩٣

ب) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$(س$_ر$ + ع$_ر$) = $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ س$_ر$ + $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ ع$_ر$ = ٩٣ + ٢٠ = ١١٣

جـ) $\text{مجـــ}_{ر=١}^{٣}$ (ع$_ر$ + ٢)^{٢} = (٥ + ٢)^{٢} + (٧ + ٢)^{٢} + (٨ + ٢)^{٢} = ٤٩ + ٨١ + ١٠٠ = ٢٣٠

http://E-learning-moe.edu.ye

تمارين ومسائل (١٠ : ١)

[١] اكتب المقادير التالية باستخدام الرمز مجـــ :

أ) ١ + ٢ + ٣ + ... + ٣٠ .

ب) ١ + ٢ + ٣ + ... + د .

جـ) ٥ + ٦ + ٧ + ... + ١٢ .

ء) (٥ + ٣)^{٢} + (٦ + ٣)^{٢} + (٧ + ٣)^{٢} .

هـ) أس$_{١}$ + أس$_{٢}$ + أس$_{٣}$ + ... + أس$_{د}$.

و) ع$_{١}^{٢}$ + ع$_{٢}^{٢}$ + ع$_{٣}^{٢}$ + ... + ع$_{د}^{٢}$.

ز) ٠ + ٢ + ٤ + ٦ + ... + ٢ د .

ح) ٢ + ٦ + ١٠ + ١٤ + ... + ٢ (٢د − ١).

[٢] اكتب ما يلي بدون استخدام الرمز مجـــ :

أ) مجـــ$_{ر=١}^{٥}$ ر .

ب) مجـــ$_{ر=٥}^{٨}$ ص$_{ر}$.

جـ) مجـــ$_{ر=١}^{٣}$ س$_{ر}$ ص$_{ر}$.

ء) مجـــ$_{ر=١}^{٦}$ ٧ .

هـ) مجـــ$_{ر=١}^{٥}$ أ .

و) مجـــ$_{ر=١}^{٤}$ $\frac{١}{٤}$.

ز) مجـــ$_{ر=١}^{٣}$ (س$_{ر}^{٢}$ ع$_{ر}^{٢}$) .

ح) مجـــ$_{ر=١}^{٤}$ (س$_{ر}$ + ٤ أ).

ط) مجـــ$_{ر=١}^{٥}$ س$_{ر}$ + مجـــ$_{ر=١}^{٤}$ ٢ .

[٣] لتكن س$_{١}$ = ٥ ، س$_{٢}$ = ٦ ، س$_{٣}$ = ١٢ ، س$_{٤}$ = ١٥ ،

ع$_{١}$ = ٢ ، ع$_{٢}$ = ٣ ، ع$_{٣}$ = ٧ ، ع$_{٤}$ = ٨ ،

استعن بالقيم السابقة في إيجاد قيمة ما يلي :

أ) مجـــ$_{ر=١}^{٤}$ (س$_{ر}$ + ع$_{ر}$ + ٣) .

ب) مجـــ$_{ر=١}^{٤}$ ع$_{ر}^{٢}$.

جـ) مجـــ$_{ر=١}^{٢}$ (س$_{ر}$ + ٥)^{٢} .

ء) مجـــ$_{ر=١}^{٢}$ (ع$_{ر}$ − ٢)^{٢} .

هـ) مجـــ$_{ر=١}^{٣}$ س$_{ر}$ ع$_{ر}$.

و) مجـــ$_{ر=١}^{٣}$ (س$_{ر}$ − ٣ ع$_{ر}$)^{٢} .

١٠ : ٢ مقاييـــس النـزعـــة المـركزيـــة

تعد مقاييس النزعة المركزية في طليعة المقاييس الوصفية الهامة وهي مقاييس لتحديد موضع أو موقع أو مكان تمركز القيم حول قيمة معينة لذلك سميت بمقاييس النزعة المركزية ، وبوجه عام ما هي إلاّ محاولة لتلخيص البيانات الإحصائية عن غيرها ، ومن مقاييس النزعة المركزية نذكر :

– المتوسط الحسابي .

http://E-learning-moe.edu.ye

– الوسيط وهو يتوسط القيم من حيث رتبها .

– المنوال وهو القيمة التي تظهر تكرارها أكثر من غيرها بين القيم ، وهو أقل أهمية من المقياسين السابقين .

أولاً : المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) :

المتوسط الحسابي لمجموعة (د) من القيم $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ... ، $س_د$ يساوى مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها ، أي أن :

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + ... + س_د}{د}$$

وهذا يكافئ التعبير :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـــ}_{ر=1}^{د} \; س_ر}{د}$$

حيث $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، د عدد القيم ، $س_ر$ القيم المختلفة ، ر دليل رقم القيم ، وفي حالة البيانات التي نظمت في جداول تكرارية (البيانات المبوبة) يكون المتوسط الحسابي :

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـــ}_{ر=1}^{م} \; ك_ر \times س_ر}{\text{مجـــ}_{ر=1}^{م} \; ك_ر}$$

حيث $\text{مجـــ}_{ر=1}^{م} \; ك_ر$ هو مجموع التكرارات ، $ك_ر$ تكرار الفئات ، $س_ر$ مركز الفئة .

ثانياً : الوسيط :

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها ويحدد ذلك في حالتين :

١ – إذا كان عدد القيم د فردية فهناك وسيط واحد رتبته هي $\frac{د+1}{2}$.

٢ – إذا كان عدد القيم د زوجياً فهناك وسيطين رتبتاهما هي $\frac{د}{2}$ ، $\frac{د}{2}+1$ ويكون الوسيط هو المتوسط الحسابي لهذين الوسيطين ، وفي حالة الجداول التكرارية يكون الوسيط و :

أ) في حالة التكرار المتجمع الصاعد :

$$\text{الوسيط } (و) = أ + \frac{\frac{د}{2} - ك_1}{ك_2} \times ل$$

حيث أ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، د التكرار الكلي .

$ك_1$ = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية .

$ك_2$ = تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة .

ب) في حالة التكرار المتجمع النازل :

$$\text{الوسيط } (و) = ب - \frac{\frac{د}{2} - ك_3}{ك_2} \times ل$$

http://E-learning-moe.edu.ye

حيث ب = الحد الأعلى للفئة الوسيطية .

د = التكرار الكلي ، ك$_{م}$ = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية ، ك$_{و}$ تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة الوسيطية .

ثالثاً : المنوال :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع وفي حالة الجداول التكرارية يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية (المناظرة لأكثر تكرار) .

مثال (١٠ - ٥) فيما يلي درجات ١٠ طلاب في مادة اللغة العربية (الدرجة العظمى ٣٠)

١٥ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٢٧ ، ١٨ ، ٢٢ ، ٢١ ، ١٨ .

أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه الدرجات .

الحـــل

المتوسط الحسابي : $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} س_ر}{د} = \frac{١٨ + ... + ١٩ + ١٢ + ١٥}{١٠} = \frac{١٩٥}{١٠} = ١٩,٥$

ولإيجاد الوسيط نرتب درجات الطلبة تصاعدياً كما يلي :

١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٧ حيث إن عدد القيم زوجية فيكون رتب العددين الأوسطيين هي $\frac{د}{٢}$ ، $\frac{د}{٢} + ١$ أي أن رتب هذين العددين هي ٥ ، ٦ ، وبالتالي ، فإن العددين هما ١٨ ، ١٩ .

∴ الوسيط = $\frac{١٨ + ١٩}{٢} = \frac{٣٧}{٢} = ١٨,٥$.

المنوال = ١٨ وهي الدرجة الأكثر تكراراً .

مثال (١٠ - ٦) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبيانات الجدول التكراري التالي والتي تمثل أعمار ٣٠ مريضاً زاروا طبيب العيون .

الفئة العمرية	١٢ - ٢٠	٢١ - ٢٩	٣٠ - ٣٨	٣٩ - ٤٧	٤٨ - ٥٦	٥٧ - ٦٥
التكـــرار	٤	٢	٣	٧	٩	٥

http://E-learning-moe.edu.ye

الحـــل

نكوّن الجدول التالي :

الفئات	مركز الفئة $س_ر$	التكرارات $ك_ر$	مركز الفئة X التكرارات $س_ر \times ك_ر$	التكرار المتجمع الصاعد
١٢ – ٢٠	$\frac{١٢+٢٠}{٢}=١٦$	٤	٦٤	٤
٢١ – ٢٩	٢٥	٢	٥٠	٦
٣٠ – ٣٨	٣٤	٣	١٠٢	٩ ← $ك_١$
				$\frac{د}{٢}=١٥$ →
٣٩ – ٤٧ ← أ	٤٣	٧ ← $ك_٢$	٣٠١	١٦
٤٨ – ٥٦	٥٢	٩	٤٦٨	٢٥
٥٧ – ٦٥	٦١	٥	٣٠٥	٣٠
المجموع		٣٠	١٢٩٠	

المتوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{٦} س_ر \times ك_ر}{\text{مجـ}_{ر=١}^{٦} ك_ر} = \frac{١٢٩٠}{٣٠} = ٤٣$.

ولإيجاد الوسيط في الجدول التكراري نحدد أولاً رتبة الوسيط (و) $= \frac{د}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$.

$ك_١ = ٩$ التكرار المتجمع الصاعد والسابق للفئة الوسيط .

$ك_٢ = ٧$ التكرار للفئة الوسيطية .الفئة التي تناظر $ك_٢$ هي (٣٩ – ٤٧) فتكون : أ = ٣٩ ، ل = ٩ .

∴ الوسيط (و) $= أ + \frac{\frac{د}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل = ٣٩ + \frac{١٥ - ٩}{٧} \times ٩$

$= ٣٩ + \frac{٦}{٧} \times ٩ = ٣٩ + \frac{٥٤}{٧} = ٤٦,٧$.

المنوال = مركز الفئة المناظرة الأكثر تكراراً ، وهي (٤٨ – ٥٦) .

∴ المنوال $= \frac{٤٨ + ٥٦}{٢} = \frac{١٠٤}{٢} = ٥٢$.

تمارين ومسائل (١٠ : ٢)

[١] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مما يأتي :

أ) ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣١ ، ٣٢ . ب) ٣ ، ٤٢ ، ٤٠ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ٤١ .

جـ) ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٢ ، ٦٢ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٧ .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٢] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع التالي :

المشاهدة	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٤	٣	٩	٥	٢	١

[٣] جدول التكرار التالي يبين أطوال ١٠٠ طالب مقاسة بالسنتميترات .

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لأطوال هؤلاء الطلبة .

الفئة	التكرار
١٤١ – ١٤٥	٥
١٤٦ – ١٥٠	٢٠
١٥١ – ١٥٥	٤٢
١٥٦ – ١٦٠	٢٥
١٦١ – ١٦٥	٨
المجمـــوع	١٠٠

[٤] حصل (٣٠) طالباً على الدرجات التالية في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٥ درجة) وكان توزيع الدرجات على النحو التالي :

١١	١٢	٦	٦	١٣	١٢	١٢	٩	١٠	١١
٩	١٠	٦	١١	١١	١١	١٠	١٠	٨	١٣
٨	٧	٦	٦	٧	٧	١١	٦	١٣	١١

أ) كوّن جدول توزيع تكراري لدرجات الطلبة .

ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لتوزيع درجات هؤلاء الطلبة .

١٠ : ٣ مقاييـــس التـشـتـــت

رغم أهمية مقاييس النزعة المركزية (المتوسط والوسيط والمنوال) لإعطاء وصفٍ أو مؤشرٍ للظواهر أو البيانات من خلال نقطة واحدة تتمركز عليها القيم تعبر عن تلك المشاهدات أو المفردات ضمن مجموعة من البيانات ، إلاّ أن هذه المقاييس وحدها قد لاتكفي فمثلاً إذا كان لدينا مجموعتان من القيم :

قيم المجموعة الأولى هي ٢٣ ، ٦٠ ، ١٠١ ، ٦٠

قيم المجموعة الثانية هي ٥٧ ، ٦٠ ، ٦٦ ، ٦٠

نلاحظ أن المجموعتين لهما المتوسط الحسابي نفسه وهو (٦١) ، وكذلك لهما الوسيط نفسه وهو (٦٠) ولهما منوال واحد هو (٦٠) .

وعلى الرغم من ذلك فلانستطيع القول بأن المجموعتين متكافئتان فقيم المجموعة الأولى متباعدة بينمـا قيـم

http://E-learning-moe.edu.ye

المجموعة الثانية متقاربة ، وفي هذه الحالة فإن مقاييس النزعة المركزية لاتعطي وصفاً متكاملاً ، لذا لابد من استخدام مقاييس أخرى تسمى مقاييس التشتت ، والتشتت هو تباعد أو تبعثر القيم في التوزيع عن بعضها البعض ، وكلما تباعدت القيم عن بعضها يكون التوزيع أكثر تشتتاً ، وكلما تقاربت من بعضها يكون التوزيع أقل تشتتاً .

ومن أهم مقاييس التشتت المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري وفيما يلي نقدم تعريفاً وامثله لكل من هذه المقاييس .

أولاً – المدى :

تعريف (١٠ : ١)

المدى هو الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة في التوزيع ويعطى بالعلاقة :

المدى = أعلى قيمة – أصغر قيمة.

وفي حالة الجداول التكرارية يكون :

المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لآخر فئة والحد الأدنى لأول فئة في التوزيع أي أن :

المدى = الحد الأعلى لآخر فئة – الحد الأدنى لأول فئة .

مثال (١٠ – ٧) اكتب المدى لكل مما يلي :

أ) ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ . ب) ٢ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩ .

الحـــل أ) المدى = ١٠ – ٤ = ٦ . ب) المدى = ١٩ – ٢ = ١٧ .

مثال (١٠ – ٨) الجدول التالي يمثل أعمار ٥٤ طالباً لأقرب سنة :

فئة الأعمار	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧
التـــكـــرار	١٢	١٧	١٥	١٠

أوجد المدى لأعمار الطلبة الموضحة في الجدول أعلاه .

الحـــل

الحد الأعلى للفئة الأخيرة = ١٧,٥

الحد الأدنى للفئة الأولى = ٥,٥

∴ المدى = ١٧,٥ – ٥,٥ = ١٢ .

يعطي حساب المدى فكرة سريعة عن تقارب أو تباعد القيم إلاّ أنه يتأثر بالقيم المتطرفة لذلك فهو أقل مقاييس التشتت دقه وكفاءة ، وبالتالي أقلها ثباتاً وصدقاً .

http://E-learning-moe.edu.ye

وللحصول على دقة في القياس والتخلص من أثر القيم المتطرفة لابد من أخذ مقاييس أخرى من مقاييس التشتت هي الانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ، وهي أهم مقاييس التشتت وأكثرها دقة لأنها تتعامل مع كل قيمة من قيم المشاهدات .

ثانياً – الانحراف المتوسط :

هو مقياس يستدل منه على الشكل الذي تتوزع به المشاهدات حول متوسطها الحسابي وفي الحقيقة أن هذا المقياس يستخدم لقياس التباين ونحن عند دراستنا للإحصاء قد نحتاج أحياناً إلى إجراء بعض التحويلات الخطية على العلامات الخام والتعبير عنها بصورة أخرى والعلامة الانحرافية هي بعد العلامة الخام عن المتوسط الحسابي للتوزيع ويرمز لها بالرمز (ح ر) أي أن ح ر = س ر – $\overline{س}$ والعلامات الانحرافية (ح ر) قد تكون موجبة أو سالبة أو صفر ويكون المجموع الجبري لها يساوي صفراً دائماً .

ويتم حساب الانحرافات المتوسطة بأخذ القيم المطلقة لانحراف كل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن المتوسط الحسابي أي أن | ح ر | = | س ر – $\overline{س}$ | لكل مشاهدة ثم بعد ذلك نوجد المتوسط الحسابي لهذه الانحرافات المطلقة فيكون هذا المتوسط الناتج لكل الانحرافات هو متوسط انحرافات المشاهدات عن متوسطها الحسابي ويرمز لها بالرمز ($\overline{ح}$ ر)

أي أن : $$\overline{ح}_ر = \frac{\sum_{ر=1}^{د} | س_ر - \overline{س} |}{د} = \frac{\sum_{ر=1}^{د} | ح_ر |}{د} .$$

حيث د = عدد المشاهدات ، $\overline{س}$ المتوسط الحسابي للمشاهدات وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلّما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي وكلّما كبرت كلّما ابتعدت عنه أي أن هذا المتوسط (متوسط الانحرافات) يعتبر بمثابة دليل أو مؤشر على قرب أو بعد المشاهدات عن متوسطها الحسابي .

مثال (١٠ – ٩) أوجد متوسط انحرافات البيانات التالية :

١٥ ، ٣١ ، ٢٨ ، ٤٣ ، ٢٢ ، ٥٠ ، ١٩ ، ٣٧ ، ٢٥ ، ١٧ .

الحـــل

أولاً : نحسب المتوسط الحسابي لهذه البيانات .

$$\overline{س} = \frac{١٥ + ٣١ + ٢٨ + ٤٣ + ٢٢ + ٥٠ + ١٩ + ٣٧ + ٢٥ + ١٧}{١٠} = \frac{٢٨٧}{١٠} = ٢٨,٧ .$$

ثانياً : نوجد الانحرافات المطلقة لكل قيمة من القيم عن متوسطها الحسابي :

$| ح_١ | = | ١٥ - ٢٨,٨ | = ١٣,٧$ ، $| ح_٢ | = | ٣١ - ٢٨,٨ | = ٢,٣$ ،

$| ح_٣ | = | ٢٨ - ٢٨,٨ | = ٠,٧$ ، ... وهكذا حتى $| ح_{١٠} | = | ١٧ - ٢٨,٨ | = ١١,٧$.

http://E-learning-moe.edu.ye

ثالثاً – نوجد المتوسط الحسابي للانحرافات المطلقة $|ح_1|$ ، $|ح_2|$ ، ... ، $|ح_{10}|$ ،

$$\therefore \bar{ح} = \frac{\sum_{ر=1}^{10} |ح_ر|}{10} = \frac{13,7 + 2,3 + 0,7 + 14,3 + 6,7 + 21,3 + 9,7 + 8,3 + 3,7 + 11,7}{10}$$

$$= \frac{92,4}{10} = 9,24 .$$

وفي حالة التوزيعات التكرارية نحسب متوسط الانحراف بالعلاقة :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر}$$

حيث $س_ر$ مركز الفئة ، $ك_ر$ تكرار الفئة ، ثم نحسب الانحراف المتوسط من العلاقة :

$$\bar{ح}_ر = \frac{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر |ح_ر|}{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر} .$$

مثال (١٠-١٠) الجدول التالي يمثل توزيع أعمار ٣٠ معلماً بالسنوات أكمل الجدول ، ثم احسب انحراف المتوسط لأعمار هؤلاء المعلمين :

العمر بالسنة	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة $س_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$|ح_ر|$	$ك_ر \times |ح_ر|$
٢٥ – ٢٧	١				
٢٨ – ٣٠	٣				
٣٠ – ٣٣	٤				
٣٤ – ٣٦	٧				
٣٧ – ٣٩	٥				
٤٠ – ٤٢	٤				
٤٣ – ٤٥	٣				
٤٦ – ٤٨	٢				
٤٩ – ٥١	١				
المجموع	٣٠				

http://E-learning-moe.edu.ye

العمر بالسنة	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة $س_ر$	$ك_ر \times س_ر$	$|ح_ر|$	$ك_ر \times |ح_ر|$
٢٥ – ٢٧	١	٢٦	٢٦	١١,٢	١١,٢
٢٨ – ٣٠	٣	٢٩	٨٧	٨,٢	٢٤,٦
٣١ – ٣٣	٤	٣٢	١٢٨	٥,٢	٢٠,٨
٣٤ – ٣٦	٧	٣٥	٢٤٥	٢,٢	١٥,٤
٣٧ – ٣٩	٥	٣٨	١٩٠	٠,٨	٤
٤٠ – ٤٢	٤	٤١	١٦٤	٣,٨	١٥,٢
٤٣ – ٤٥	٣	٤٤	١٣٢	٦,٨	٢٠,٤
٤٦ – ٤٨	٢	٤٧	٩٤	٩,٨	١٩,٦
٤٩ – ٥١	١	٥٠	٥٠	١٢,٨	١٢,٨
المجموع	٣٠		١١١٦		١٤٤

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{٩} (ك_ر \times س_ر)}{\text{مجـ}_{ر=١}^{٩} ك_ر} = \frac{١١١٦}{٣٠} = ٣٧,٢$$

انحراف المتوسط $\bar{ح} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{٩} ك_ر \times |ح_ر|}{\text{مجـ}_{ر=١}^{٩} ك_ر} = \frac{١٤٤}{٣٠} = ٤,٨$.

التباين والانحراف المعياري:

تعريف (١٠ : ٢)

يعرَّف التباين بأنه مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوم على عدد القيم ناقص واحد ويرمز له بالرمز ($ع^٢$) .

ويعبر عنه رمزياً بالصورة :

$$ع^٢ = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} (س_ر - \bar{س})^٢}{د - ١} .$$

حيث $ع^٢$ التباين ، $س_ر$ القيم المختلفة ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، $د$ عدد القيم .

أما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين .

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{ع^٢} = ع = \sqrt{\frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} (س_ر - \bar{س})^٢}{د - ١}}$$

وفي حالة البيانات المنظمة في جداول التكرار نجد أن التباين هو : $ع^٢ = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} ك_ر \times (س_ر - \bar{س})^٢}{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} ك_ر - ١}$

حيث $ك_ر$ هو التكرار .

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (١٠-١١) أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم التالي : ١٢ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٨ .

الحـــل

لحساب التباين نوجد أولاً الوسط الحسابي للقيم $\overline{س} = \frac{١٢ + ١٣ + ١٥ + ١٧ + ١٨}{٥} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$.

ثم نكوّن الجدول التالي :

قيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٢	٣-	٩
١٣	٢-	٤
١٥	٠	٠
١٧	٢	٤
١٨	٣	٩
	مجـ $(س_ر - \overline{س})^٢$	٢٦

التباين $= \frac{\text{مجـ}(س_ر - \overline{س})^٢}{د - ١} = \frac{٢٦}{٤} = ٦,٥$.

∴ الانحراف المعياري $= \sqrt{٦,٥} \approx ٢,٥٥$

مثال (١٠-١٢) الجدول التكراري التالي يمثل درجات ٢٠ طالباً في اختبار لمادة الرياضيات (الدرجة العظمى ١٠ درجات) .

	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
	١	٤	٣	٣	٥	٣	١

أوجد التباين والانحراف المعياري لدرجات هؤلاء الطلبة

الحـــل

لحساب التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي :

الدرجة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$(س_ر - \overline{س})^٢ \times ك_ر$
٣	١	٣	٣-	٩	٩
٤	٤	١٦	٢-	٤	١٦
٥	٣	١٥	١-	١	٣
٦	٣	١٨	٠	٠	٠
٧	٥	٣٥	١	١	٥
٨	٣	٢٤	٢	٤	١٢
٩	١	٩	٣	٩	٩
المجموع	٢٠	١٢٠		٢٨	٥٤

المتوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} س_ر \times ك_ر}{\text{مجـ} ك_ر} = \frac{١٢٠}{٢٠} = ٦$

التباين $ع^٢ = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{د}(س - \overline{س})^٢ \times ك_ر}{\text{مجـ}_{ر=١}^{د} ك_ر - ١} = \frac{٥٤}{١٩} \approx ٢,٨$

الانحراف المعياري $= \sqrt{ع^٢} \approx \sqrt{٢,٨} \approx ١,٧$.

http://E-learning-moe.edu.ye

مثال (١٠-١٣) يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالباً . احسب التباين والانحراف المعياري لدرجة هؤلاء الطلبة .

	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧	١٨ – ٢٠
	١	٣	٦	١٠	٨	٢

الحـــل

نكوّن الجدول التالي :

الفئـــة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^2$	$(س_ر - \overline{س})^2 \times ك_ر$
٣ – ٥	٤	١	٤	٨,٧-	٧٥,٦٩	٧٥,٦٩
٦ – ٨	٧	٣	٢١	٥,٧-	٣٢,٤٩	٩٧,٤٧
٩ – ١١	١٠	٦	٦٠	٢,٧-	٧,٢٩	٤٣,٧٤
١٢ – ١٤	١٣	١٠	١٣٠	٠,٣	٠,٠٩	٠,٩
١٥ – ١٧	١٦	٨	١٢٨	٣,٣	١٠,٨٩	٨٧,١٢
١٨ – ٢٠	١٩	٢	٣٨	٦,٣	٣٩,٦٩	٧٩,٣٨
المجموع		٣٠	٣٨١		١٦٦,١٤	٣٨٤,٣

أولاً : $\overline{س} = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{٦} (س_ر \times ك_ر)}{\text{مجـ}_{ر=١}^{٦} ك_ر} = \frac{٣٨١}{٣٠} = ١٢,٧$

ثانياً : التباين $ع^2 = \frac{\text{مجـ}_{ر=١}^{٦} (س_ر - س)^2 \times ك_ر}{\text{مجـ}_{ر=١}^{٩} ك_ر - ١} = \frac{٣٨٤,٣}{٣٠} \approx ١٣,٢٥$.

∴ الانحراف المعياري $= \sqrt{ع^2} = \sqrt{١٣,٢٥} \approx ٣,٦٤$.

تمارين ومسائل (١٠ : ٣)

[١] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للقيم التالية :

أ) ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ . ب) ٢٢ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٩ ، ٦ .

جـ) ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٦ . د) ٥٢ ، ٥٦ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٢ .

[٢] أضف العدد ٣ إلى كل من الأعداد الآتية : ٣ ، ٦ ، ٢ ، ١ ، ٧ ، ٥ أثبت أن هذه الإضافة لاتؤثر على قيمة التباين .

http://E-learning-moe.edu.ye

[٣] احسب الانحراف المتوسط لكل من القياسات التالية :

أ) ٦٥ ، ٦٣ ، ٦٢ ، ٦٧ . ب) ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ .

جـ) ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٢ . د) ٤٥ ، ٤٢ ، ٤٥ ، ٤٣ .

[٤] الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري لوزن ٣٠ طفلاً لأقرب كيلوجرام .

الدرجة	٢ – ٤	٥ – ٧	٨ – ١٠	١١ – ١٣
التكرار	٥	٨	١٢	٥

أوجد أ) المدى . ب) الانحراف المتوسط .

جـ) التباين والانحراف المعياري لأوزان الأطفال .

[٥] أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لدرجات ١٠٣ طالباً موزعة كما يلي :

الدرجة	٢٥	٢٧	٣١	٣٣	٣٨	٤٠	٤٢	٤٥	٤٦	٥٠
التكرار	٥	١٠	١٢	١٥	١٩	١٥	١١	٨	٦	٢

[٦] البيانات التالية درجات ٦٠ طالب في مادة العلوم (الدرجة العظمى ٣٠ درجة) .

١٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ١٩

٢٥ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٩

٢٠ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ١٢ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٥ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٧

٢٢ ، ١٦ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٢٩ ، ٢٤ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٢ ، ٢٨ ، ١٦ ، ١٧ ، ٢٧

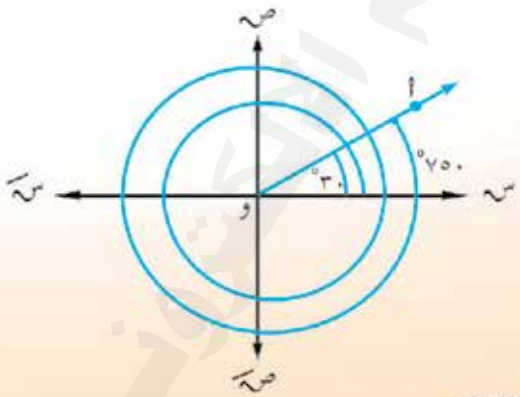
١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ .

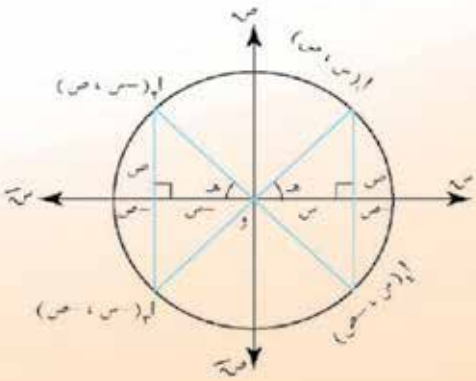
كوّن جدولاً تكرارياً لدرجات الطلبة بالفئات بحيث يكون طول الفئة = ٥ ، ثم أوجد المدى والتباين لدرجات هؤلاء الطلبة .



الإدارة العامة للمناهج
+967771761429
Curricula.Ye@gmail.com
https://e-learning-moe.edu.ye
للحصول على المناهج الدراسية عبر:
https://t.me/Books_Yemen_new

http://E-learning-moe.edu.ye





الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني